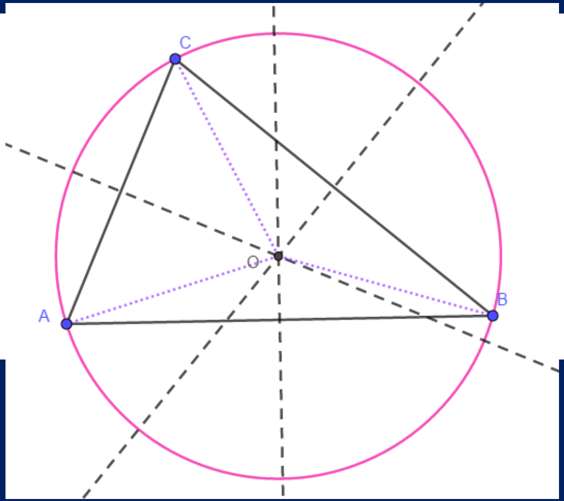
Matematika

a középiskolák első osztálya számára

HÁROMSZÖG NEVEZETES PONTJAI ÉS VONALAI

KÖRÜLÍRHATÓ KÖR KÖZÉPPONTJA

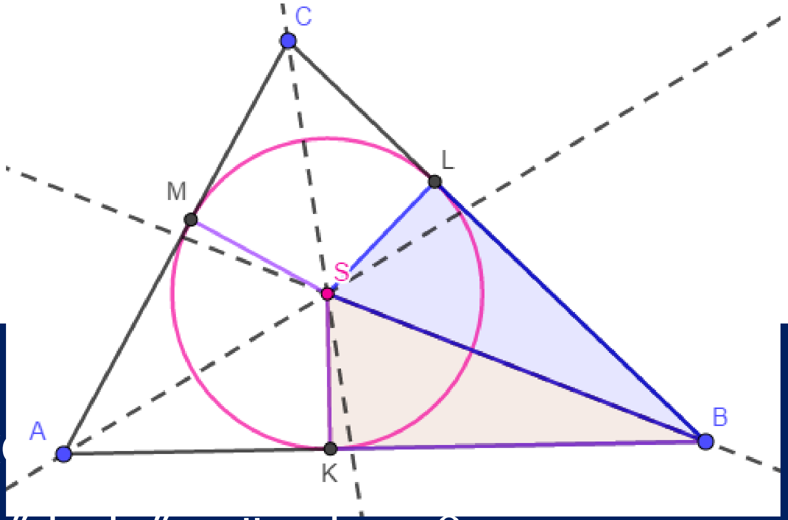


- *Tétel: (körülírható kör középpontja)* A háromszög oldalainak három felezőmerőlegese egy pontban metszi egymást, és ez a pont a háromszög köré írható körének a középpontja.

- *Bizonyítás :* Legyenek *p, q, r* egyenesek az ABC háromszög BC, CA, AB oldalainak felezőmerőlegesei. Először is bizonyítsuk be, hogy a *p, q, r* egyenesek metszik egymást. Tegyük fel az ellenkezőjét, vagyis, hogy ezek az egyenesek diszjunktak, tehát párhuzamosak. A párhuzamossági axióma következménye alapján, mivel az AC egyenes metszi a *q* egyenest, metszenie kell a vele párhuzamos *p* egyenest is. A transzverzális szögeire vonatkozó tétel alapján az AC egyenes merőleges a *p* egyenesre is. Ekkor a C pontból két merőleges van *p* egyenesre, ami lehetetlen. Tehát, *p* és *q* oldalfelezők metszik egymást egy tetszőleges O pontban.

- Mivel az O pont illeszkedik a BC szakasz felezőmerőlegeséhez, ezért OB≅OC, hasonlóan az O pont illeszkedik az AC szakasz felezőmerőlegeséhez is, tehát OA≅OC. A tranzitivitás alapján OA≅OB, vagyis az O pont illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegeséhez is

BELEÍRHATÓ KÖR



- Tétel: (beleírható kör) A háromszög három szögfelezője

egy pontban metszi egymást, és ez a pont a háromszögbe írható kör k

- Bizonyítás: Legyenek u, v, w az ABC háromszög A, B, C csúcsánál lévő belső szögek α, β,γ szögfelezői. Ha w és v párhuzamos lenne, a párhuzamosok transzverzálisa alapján

Ez lehetetlen, tehát v és w metszik egymást egy S pontban.

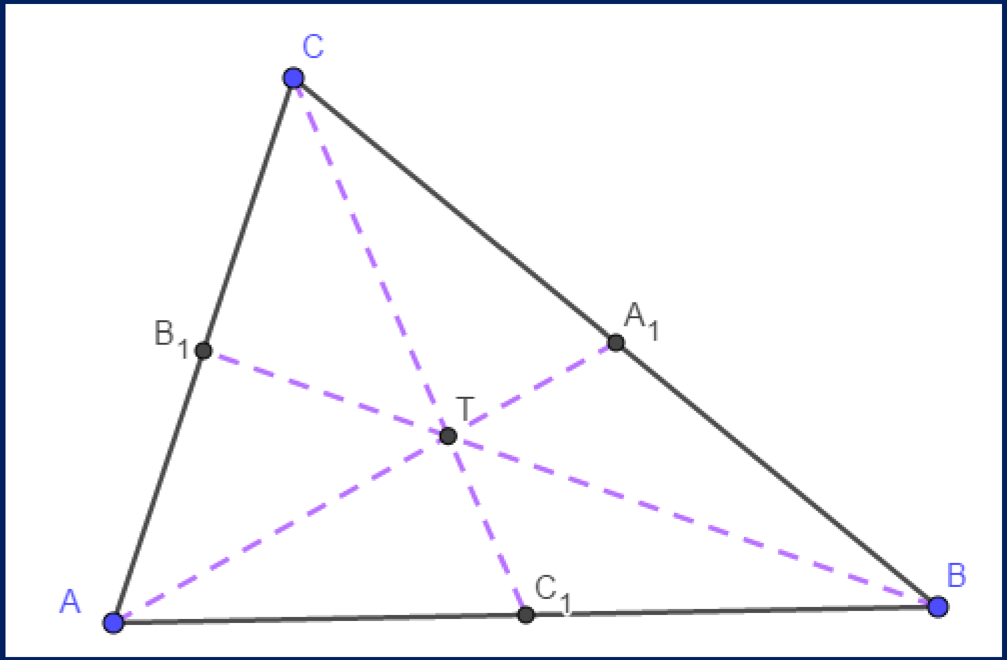
Legyenek K, L, M pontok az S pontból rendre az AB, BC, AC oldalakra szerkesztett merőlegesek talppontjai. Ekkor a BSK és BSL háromszögek a SZOSZ tétel alapján egybevágók, mert minden pár megfelelő szögük egybevágó, és van közös oldaluk. Ebből következik, hogy SK≅SL. Hasonlóan, mivel az S pont illeszkedik w egyeneshez, bizonyítjuk, hogy SL≅SM.

A tranzitivitás alapján SK≅SM. Most már SA≅SA, SK≅SM, AKS∠≅AMS∠=90°, miközben KAS∠ és AMS∠ szögek mindketten hegyesszögek, ezért az OOSZ tétel alapján AKS és AMS háromszögek egybevágók egymással.

Ebből az következik, hogy KAS∠≅MAS∠, vagyis az AS félegyenes felezi az α szöget, tehát az S pont illeszkedik az u félegyeneshez is

SÚLYPONT

- *Tétel: (Súlypont)* A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, amely pont ezeket a szakaszokat 2 : 1 arányban osztja, és úgy, hogy $AT = 2 \cdot TA_1$, ahol az A pont a háromszög egyik csúcsa, A_1 a szemköztes oldal felezőpontja, T pedig a súlyvonaluk metszéspontja
- Bizonyítás: Legyenek A_1, B_1, C_1 pontok az ABC háromszögben rendre a BC, CA, AB oldalak felezőpontjai. A Pasch-axióma alkalmazásával belátható, hogy az AA_1 és BB_1 súlyvonalak metszik egymást egy pontban, jelöljük ezt T-vel.



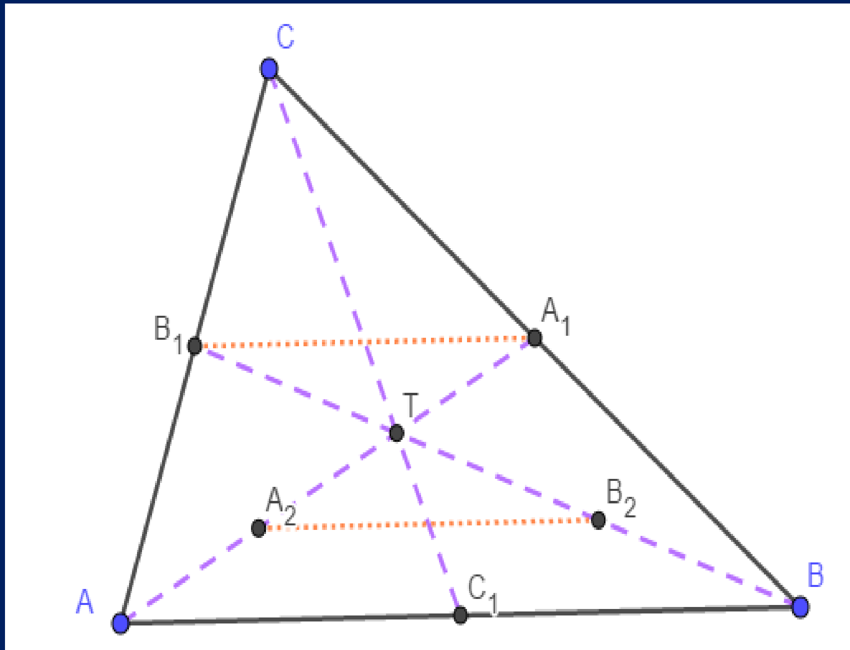
SÚLYPONT

Legyenek A_2 és B_2 pontok az AT és BT szakaszok felezőpontjai. Ekkor az A_1B_1 szakasz az ABC háromszög AB oldalának megfelelő középvonala, ezért vele párhuzamos és fele akkora, vagyis $A_1B_1 = \frac{AB}{2}$.

Hasonlóan B_2A_2 szakasz a TAB háromszög AB oldalának megfelelő középvonala, tehát vele párhuzamos és fele akkora, vagyis $A_2B_2 = \frac{AB}{2}$.

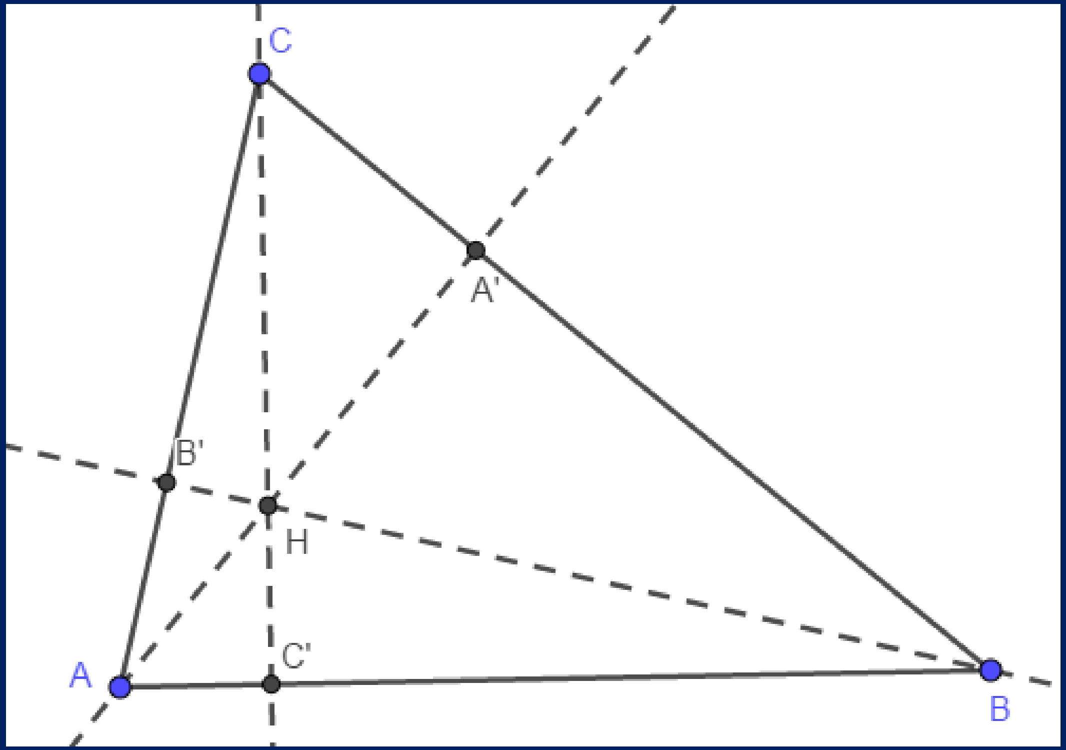
A paralelogrammákra vonatkozó tétel alapján megállapítjuk, hogy $A_1B_1A_2B_2$ négyszög paralelogramma, ezért az átlói felezik egymást T pontban. Ebből következik, hogy $AA_2 \cong A_2T \cong TA_1$ és $BB_2 \cong B_2T \cong TB_1$, vagyis $AT:TA_1 = BT:TB_1 = 2:1$.

Szükséges még bebizonyítani, hogy a CC_1 súlyvonal is tartalmazza a T pontot és érvényes $CT:TC_1 = 2:1$. Az előző esethez hasonlóan, itt is belátható, hogy az AA_1 és CC_1 súlyvonalak metszik egymást egy T_0 pontban úgy, hogy $CT_0:T_0C_1 = AT_0:T_0A_1 = 2:1$. De mivel $AT:TA_1 = 2:1$, ezért csak $T_0 = T$ lehet, amivel a bizonyítást befejeztük



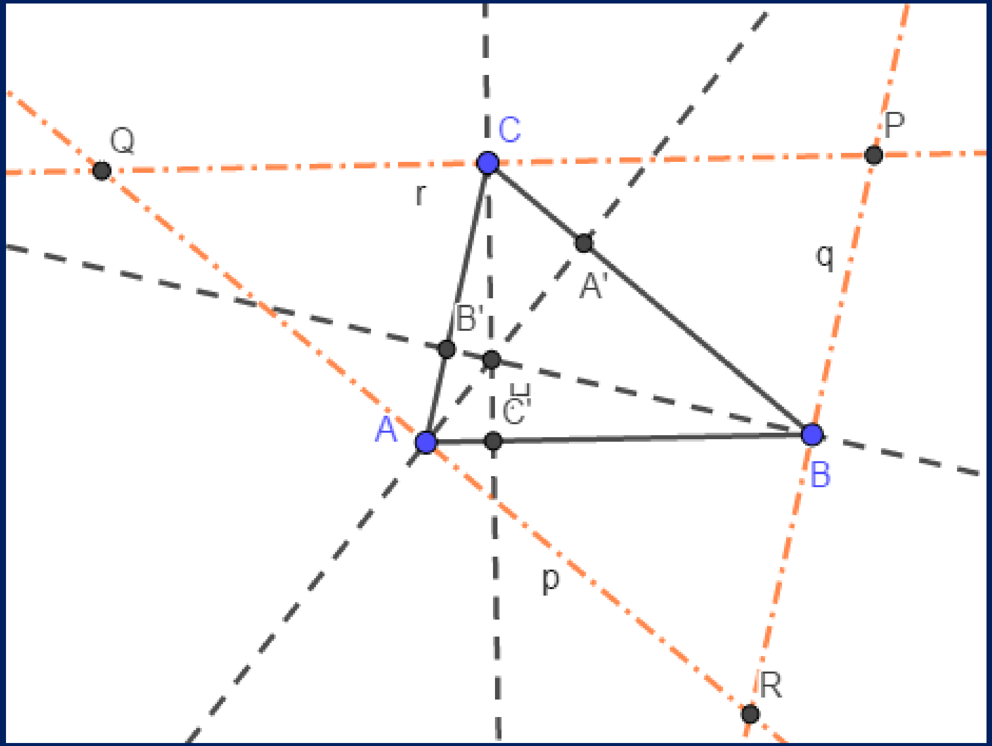
MAGASSÁGPONT

- Tétel: (Magasságpont) A háromszög magasságvonalai által meghatározott egyenesek egy pontban metszik egymást.
- Bizonyítás : Legyenek a p, q, r egyenesek merőlegesek az ABC háromszög A, B, C csúcsain keresztül az AA′, BB′, CC′ megfelelő magasságokra.



MAGASSÁGPONT

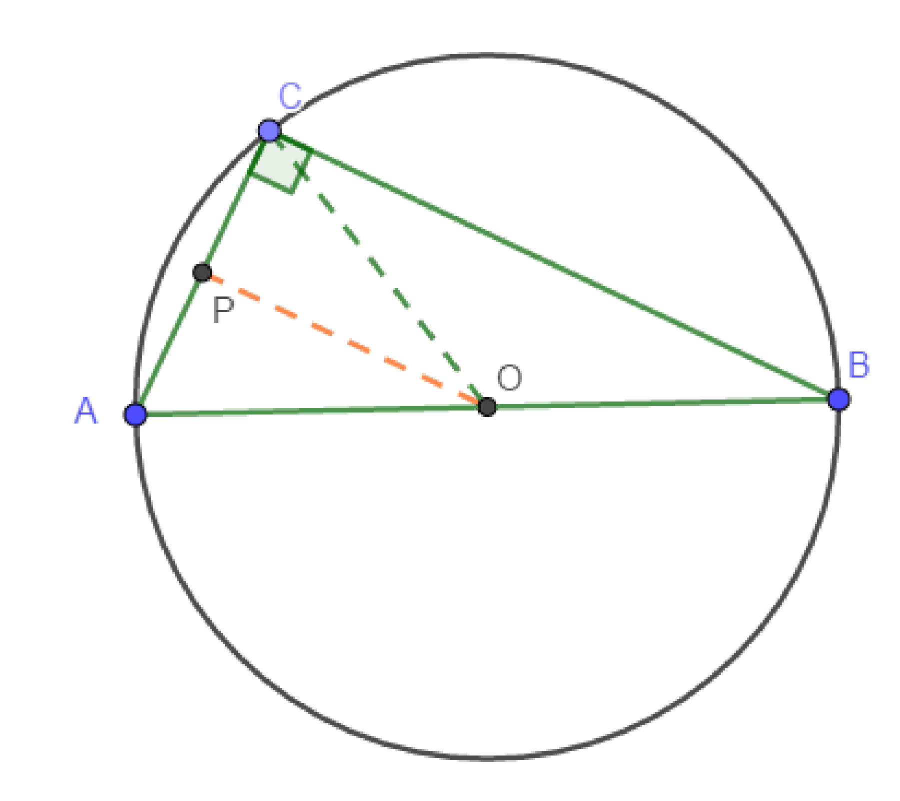
- Hasonlóan igazoljuk, hogy AC párhuzamos q, AB pedig párhuzamos r egyenessel. Mivel p és q nem lehetnek egymással párhuzamosak, (mert akkor BC és AC is párhuzamos lenne egymással, ami lehetetlen), ezért p és q metszik egymást és a metszéspontjukat jelölje R.
- p és r egyenesek metszéspontja legyen Q , q és r egyenesek metszéspontja legyen P.
- Ekkor a BCQA négyszög paralelogramma, mert szemköztes oldalai párhuzamosak egymással, BC||QA és AB||QC.
- A paralelogrammákra vonatkozó tétel alapján BC≅QA. Hasonlóan bizonyítjuk, hogy a BCAR négyszög paralelogramma, ezért BC≅AR. Ezért érvényes QA≅AR, vagyis az A pont a PQR háromszög RQ oldalának felezőpontja, az AA′ egyenes a felezőmerőlegese.
- Hasonlóan BB′ és CC′ is a PQR háromszög oldalfelezői.
- tehát AA′, BB′, CC′ egy H pontban metszik egymást, köréírt kör középpontja



DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG

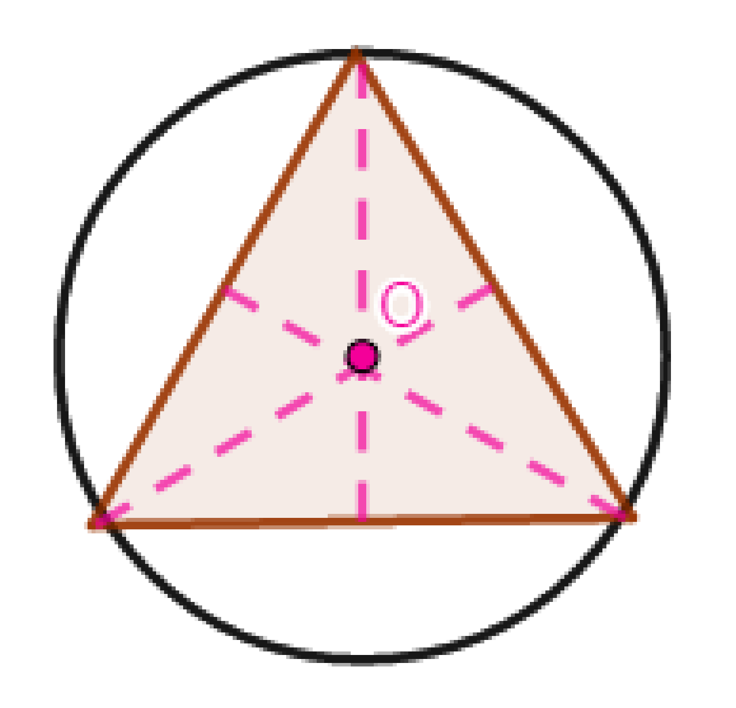
- A derékszögű háromszög körülírható körének középpontja az átfogójának felezőpontja.

- *Bizonyítás:* Legyen az O pont az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja, és legyen a P pont az AC befogójának felezőpontja. Ekkor az OP szakasz az ABC háromszög BC oldalának megfelelő középvonala, tehát vele párhuzamos. Ebből következik, hogy $OP \perp AC$, az **OSZO** tétel alapján $OPC\Delta$ és $OPA\Delta$ háromszögek egybevágók, tehát $OC \cong OA$. Mivel $OB \cong OA$, ebből következik, hogy az O pont, mint az átfogó felezőpontja, a háromszög körülírható körének középpontja



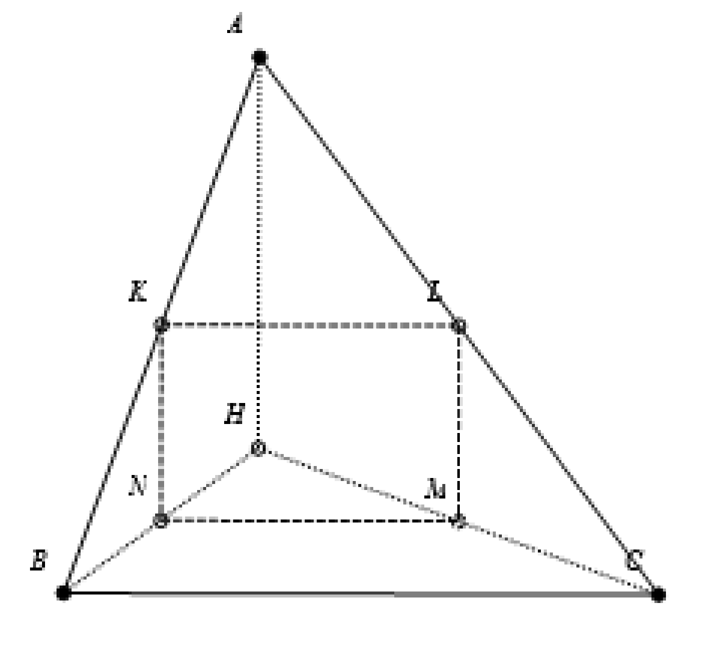
SZABÁLYOS HÁROMSZÖG

- A szabályos háromszög minden nevezetes pontja egybeesik.
- Ezt a pontot az egyenlő oldalú háromszög *középpont*jának nevezzük.



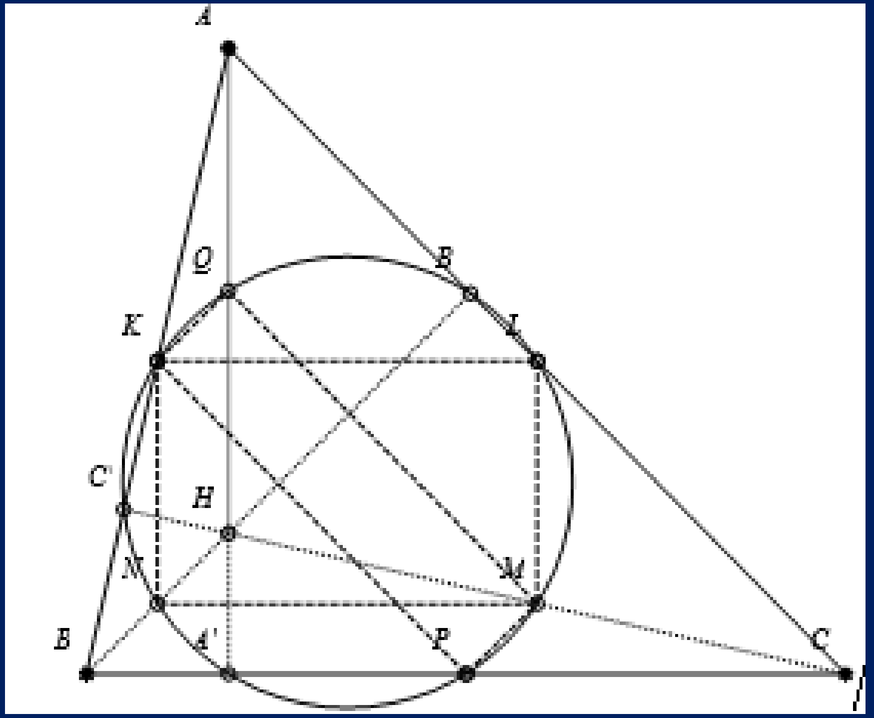
MAGASSÁGVONALAK

- Legyen a H pont az ABC háromszög magasságpontja. Ha K, L, M, N pontok az AB, AC, HC, HB szakaszok felezőpontjai, igazold, hogy a KLMN négyszög téglalap.
- Megoldás: A KL és MN szakaszok az ABC és HBC háromszögek BC oldalnak megfelelő középvonalai, ezért egybevágók és párhuzamosak egymással.
- Tehát érvényes: KL≅MN≅$\frac{BC}{2}$, KL||BC és MN||BC. Ezért a KLMN négyszög paralelogramma.
- Elég csak annyit bebizonyítani, hogy egyik belső szöge derékszög. De a KN szakasz ekkor az ABH háromszög középvonala, ezért párhuzamos az AH egyenessel, vagyis az A csúcsból húzott magasságvonallal.
- Tehát a KN merőleges a BC oldalra, és a vele párhuzamos KL oldalra is, ezért a KLMN paralelogramma valóban téglalap



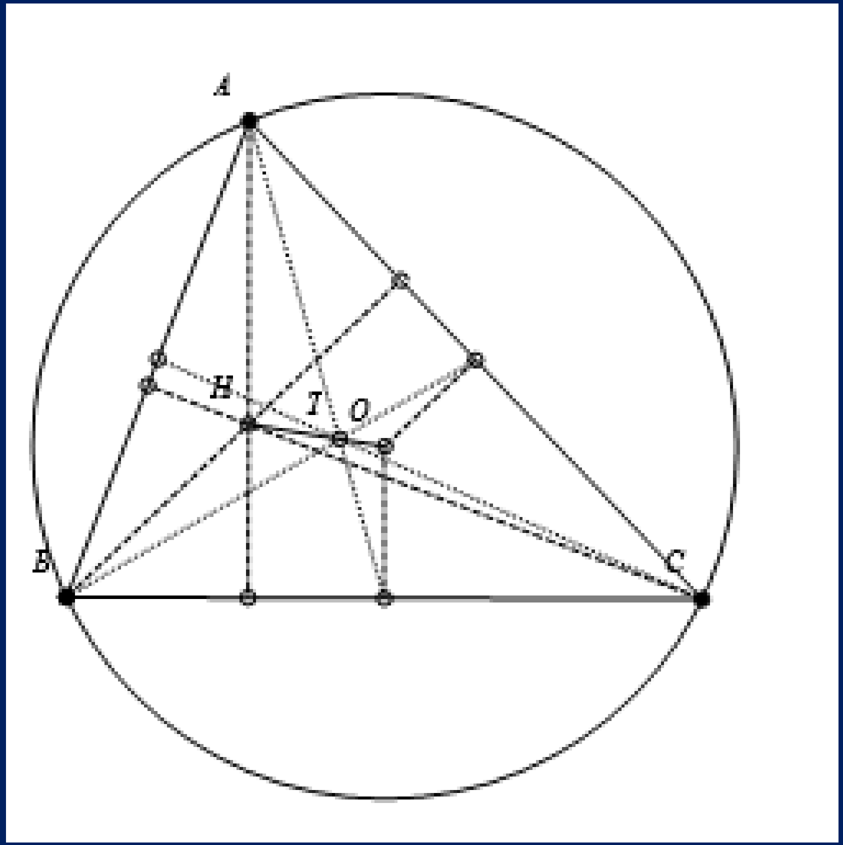
KILENCPONTOS FEUERBACH –KÖR

- A háromszög oldalfelezőpontjai, a merőlegesek talppontjai, valamint a magasságpont és a csúcsok által meghatározott szakaszok felezőpontjai bármely háromszögben egy körön vannak. (*Euler-kör*, vagy *kilencpontos Feuerbach –kör*)
- *Megoldás:* Az előző példában bizonyított állítást használjuk itt is. Mivel a KLMN négyszög téglalap, hasonlóan, ha a P pont a BC oldal felezőpontja, a Q pont az AH szakasz felezőpontja, akkor a PMQK négyszög ugyancsak téglalap. Mivel a KM szakasz ezen téglalapok közös átlója, köréjük kör szerkeszthető (a KM átmérő felett). Bizonyítani kell még, hogy a magasságok talppontjai is ezen a körön vannak.
- Az A' pont, mint az A csúcsból szerkesztett magasság talppontja, illeszkedik ehhez a körhöz, mert QA'P∠ derékszög, PQ pedig a kör egyik átmérője. Hasonlóan bizonyítjuk a többi pontra is



EULER EGYENES

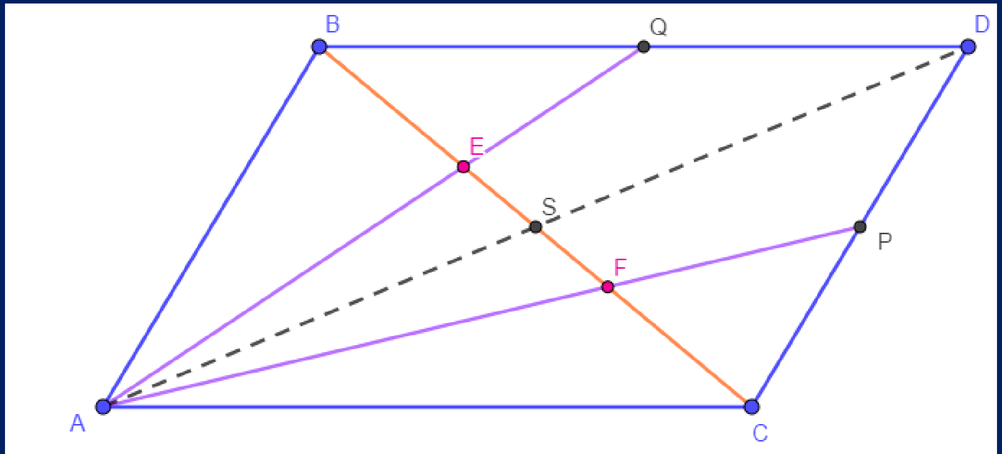
- A háromszögben a magasságpont (H), súlypont (T) és körülírt kör középpontja kollineáris pontok, ez az Euler egyenes.



$$AHT\Delta \sim TOA_1\Delta$$
$$HT = 2 \cdot TO$$

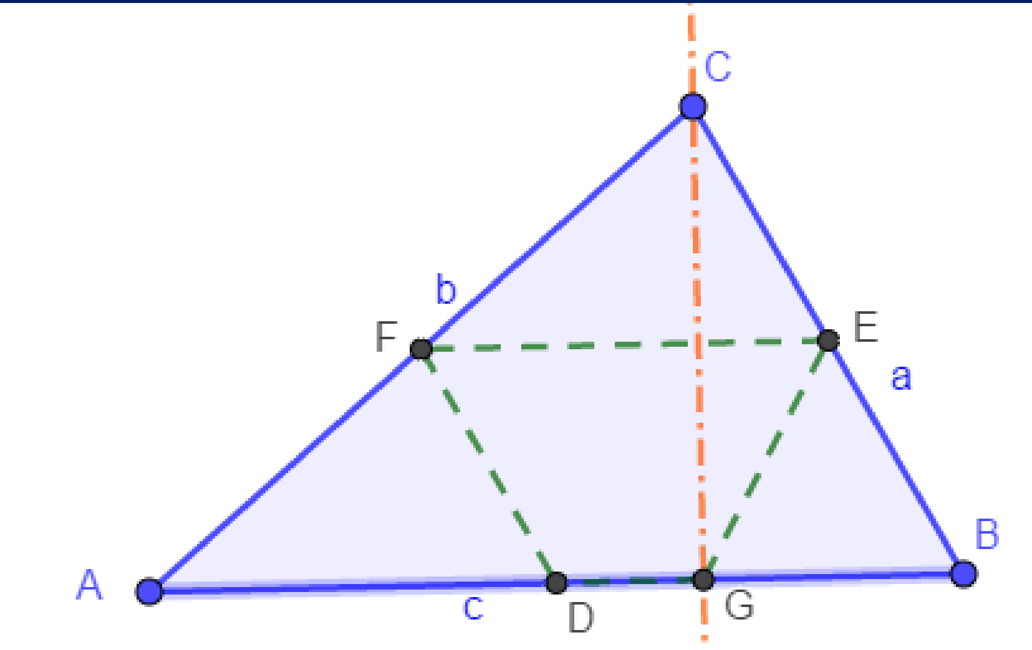
ALKALMAZÁS

- Ha a P és Q pontok az ABCD paralelogramma BC és CD oldalainak felezőpontjai, igazold, hogy az AP és AQ szakaszok a paralelogramma BD átlóját három egyenlő részre bontják.
- Megoldás: az ACD háromszögben F pont a súlyvonalak metszéspontja, tehát súlypont, akkor CF:FS=2:1
- az ABD háromszögben E pont a súlyvonalak metszéspontja, tehát súlypont, akkor BE:ES=2:1
- S pont a paralelogramma átlóinak metszéspontja, akkor BS≅CS, ES≅SF, BE≅CF
- Ezért BE≅ES+SF=EF≅FC



ALKALMAZÁS

- Igazold, hogy egy általános háromszögnél (nincs két egyenlő oldala) az oldalfelező pontok és az egyik magasság talppontja egyenlő szárú trapézt alkot.
- F,D,E oldalfelező pontok, G magasság talppontja
- FE középvonal, párhuzamos AB oldallal illetve DG szakasszal.
- Ezért FDGE trapéz.
- FD középvonal, párhuzamos CB oldallal és fele akkora.
- CBG derékszögű háromszög körülírt körének középpontja E pont, tehát EG egybevágó CB szakasz felével, akkor egybevágó FD szakasszal is
- FDGE egyenlő szárú trapéz



Köszönöm a megtisztelő figyelmet

Ez a bemutató a háromszög nevezetes pontjait tárgyalta