Matematika

a középiskolák első osztálya számára

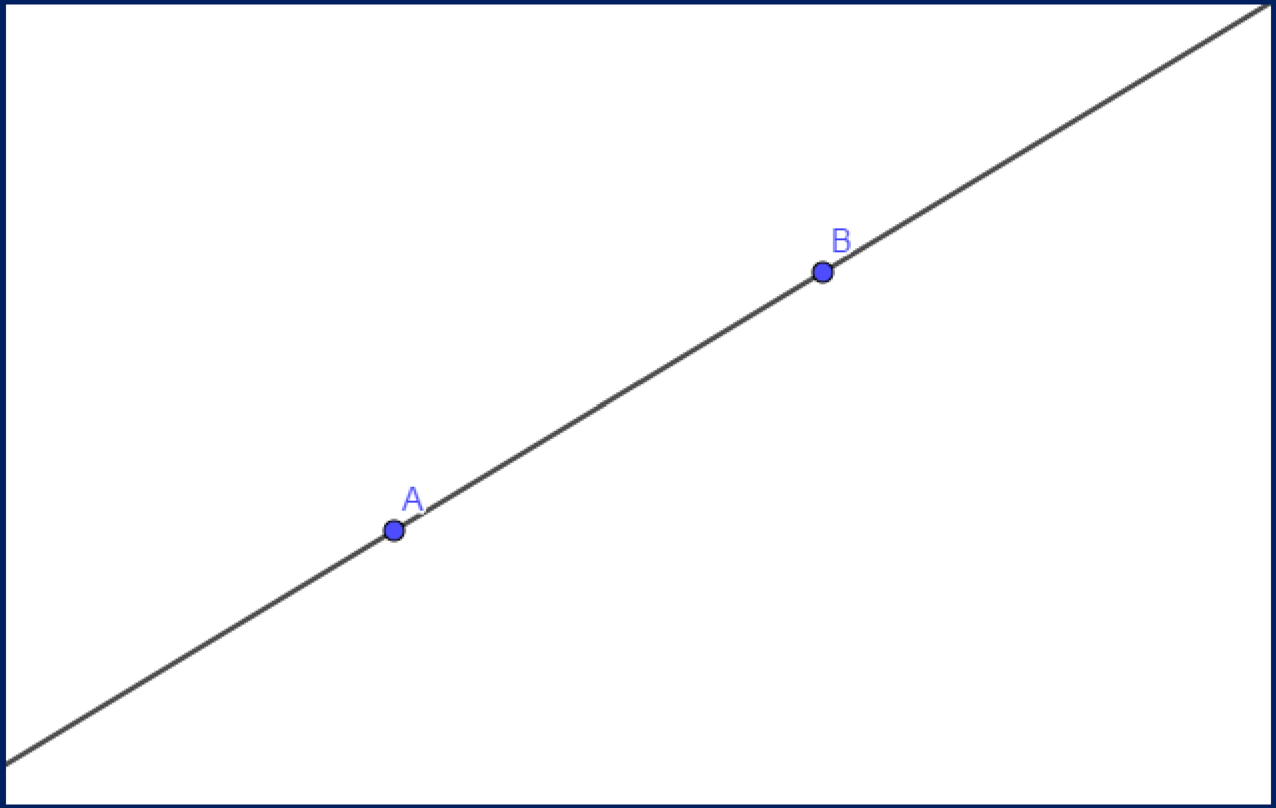
GEOMETRIA

Illeszkedési axiómák

Az egyenesek és síkok mint alapfogalmak, a pontok egy-egy részhalmazát képezik, ezért megfigyelhetjük köztük az ismert halmazrelációkat: $\in$ eleme, és $\subset$ részhalmaza.

ILLESZKEDÉSI AXIÓMÁK

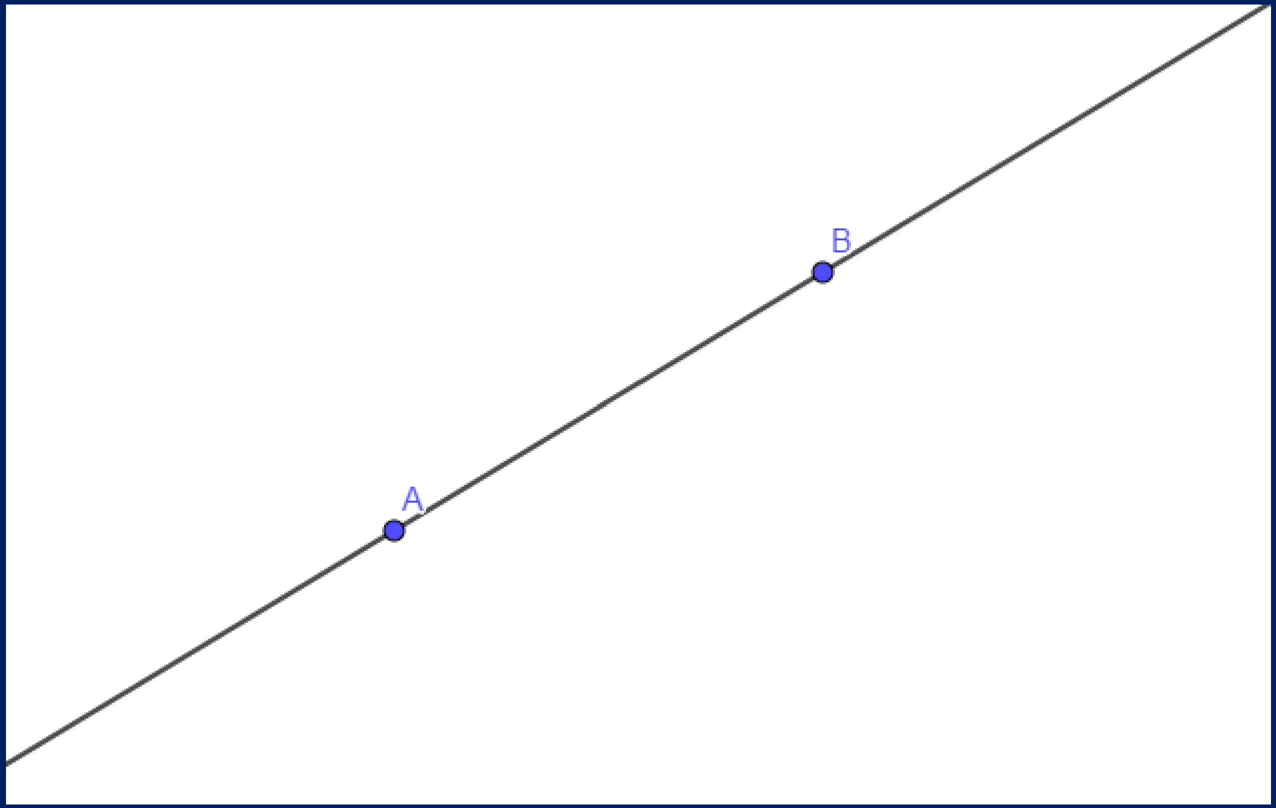
- 1.axióma: I_1 *Két különböző ponthoz egy és csakis egy egyenes illeszkedik, amely tartalmazza ezt a két pontot.*



$A \in p$
$B \in p$

ILLESZKEDÉSI AXIÓMÁK

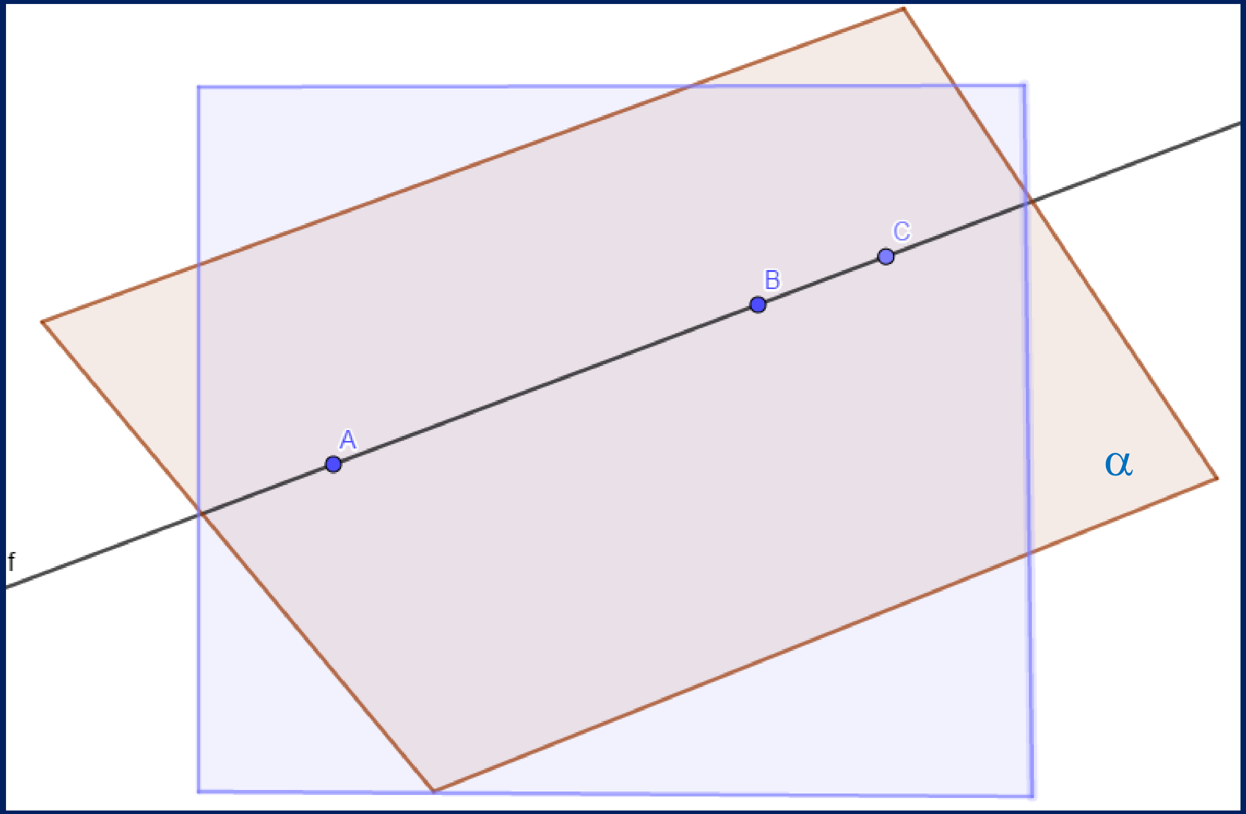
- 2.axióma:I_2 *Minden egyenes tartalmaz legalább két pontot.*



$A \in p$
$B \in p$

ILLESZKEDÉSI AXIÓMÁK

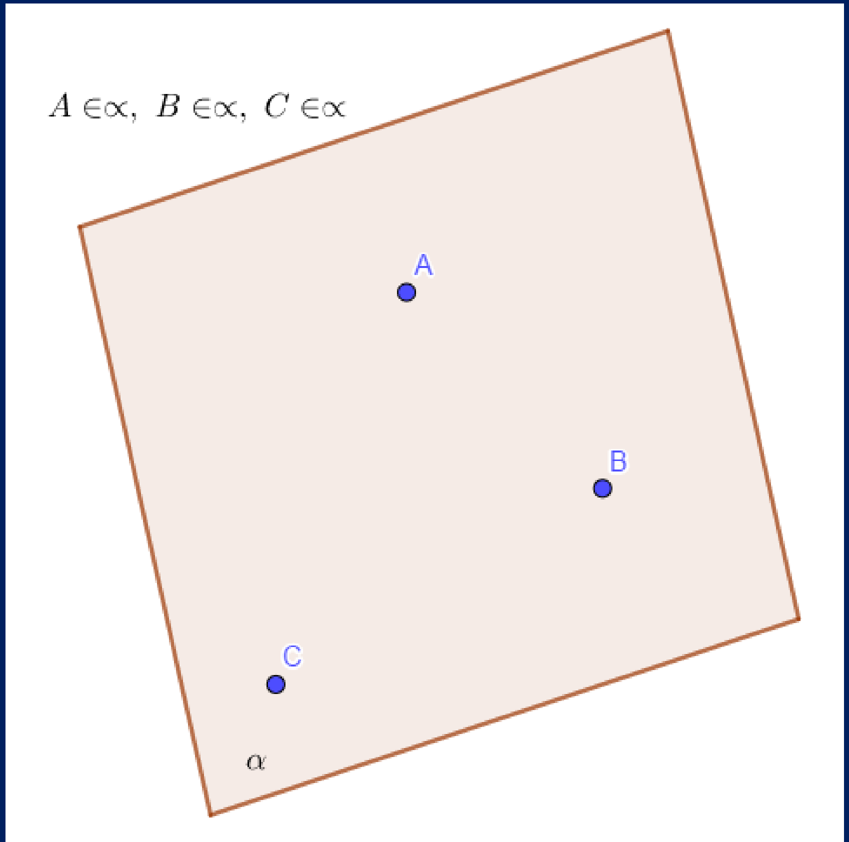
- 3.axióma: *I_3 Bármely három ponthoz található legalább egy sík, amelyhez ezek a pontok illeszkednek.*



$A \in \alpha$
$B \in \alpha$
$C \in \alpha$

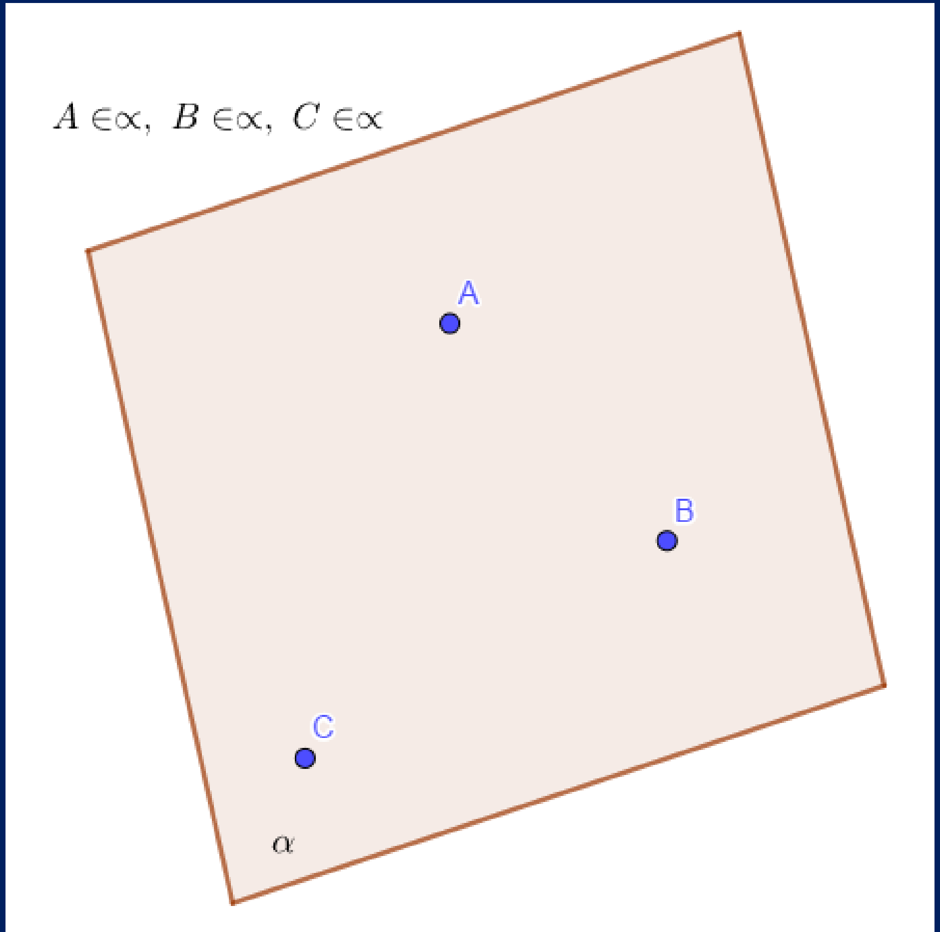
ILLESZKEDÉSI AXIÓMÁK

- 4.axióma: *I_4 Ha három pont nincs egy egyenesen, akkor egy és csakis egy sík illeszkedik hozzájuk.*



ILLESZKEDÉSI AXIÓMÁK

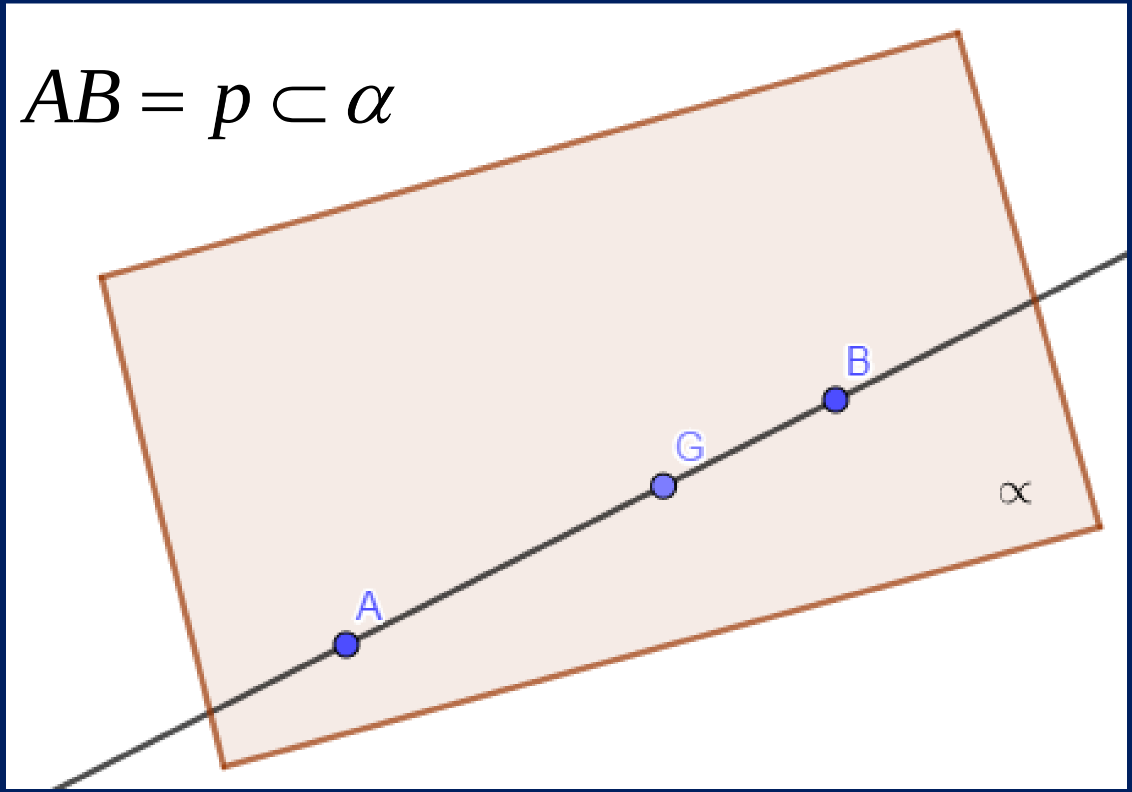
- 5.axióma: I_5 *Bármely sík tartalmaz legalább három pontot.*



ILLESZKEDÉSI AXIÓMÁK

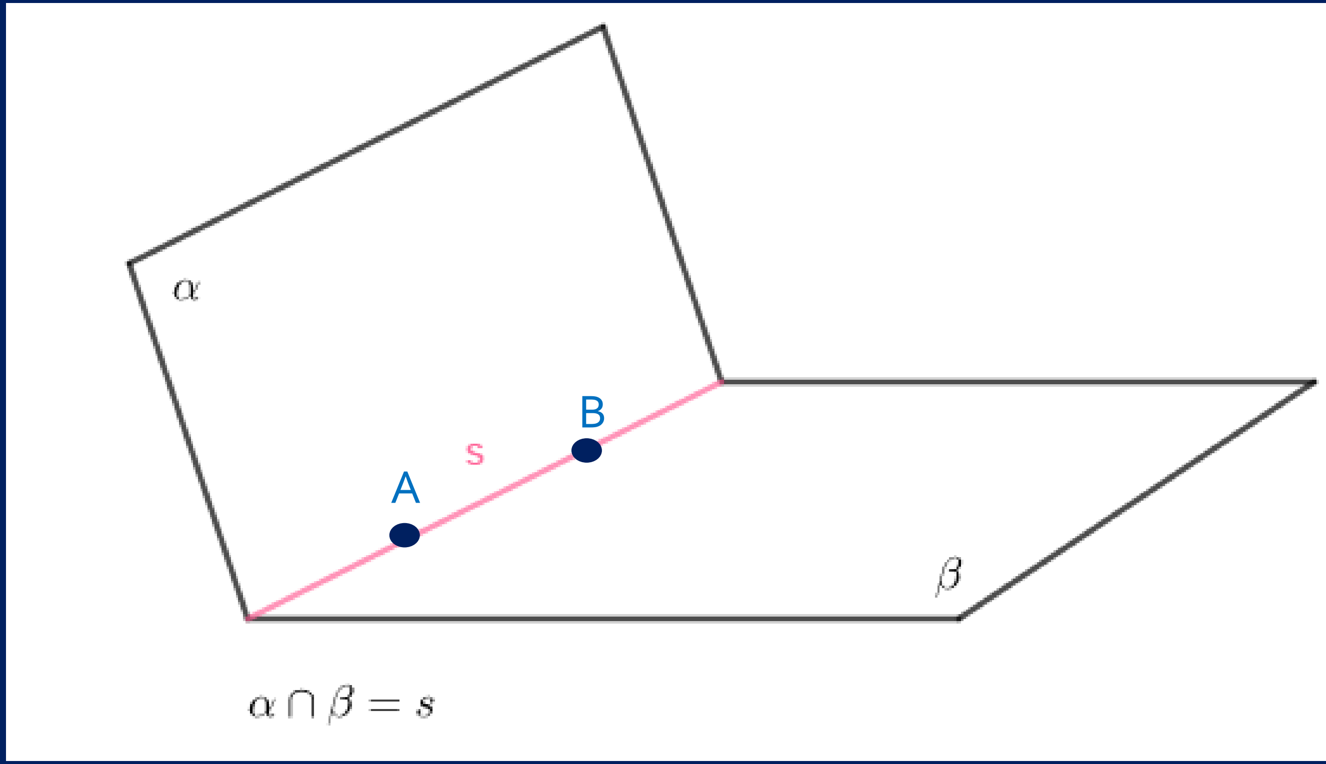
- 6.axióma: *I_6 Ha egy sík tartalmazza egy egyenes két különböző pontját, akkor tartalmazza a teljes egyenest, annak minden pontját.*

$$(\forall G)(G \in AB \Rightarrow G \in \alpha)$$



ILLESZKEDÉSI AXIÓMÁK

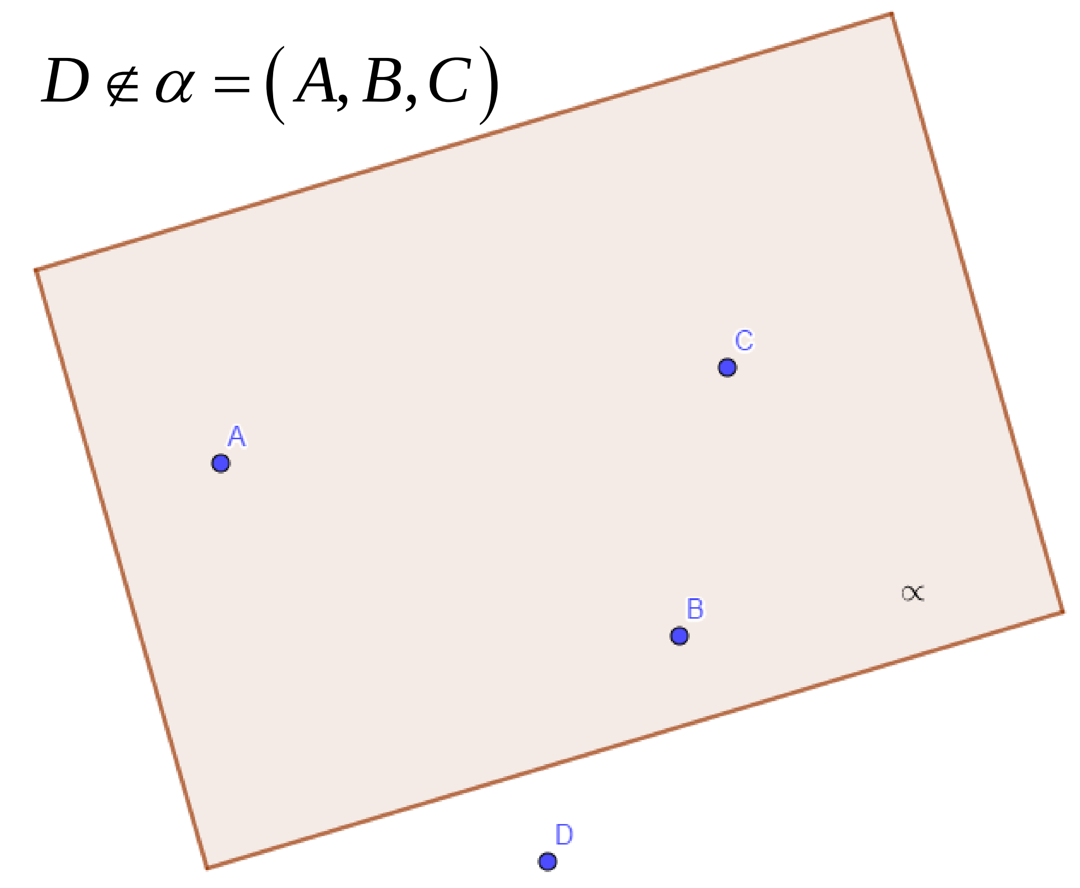
- 7.axióma: *I_7 Ha két síknak van egy közös pontja, akkor van legalább még egy közös pontjuk.*



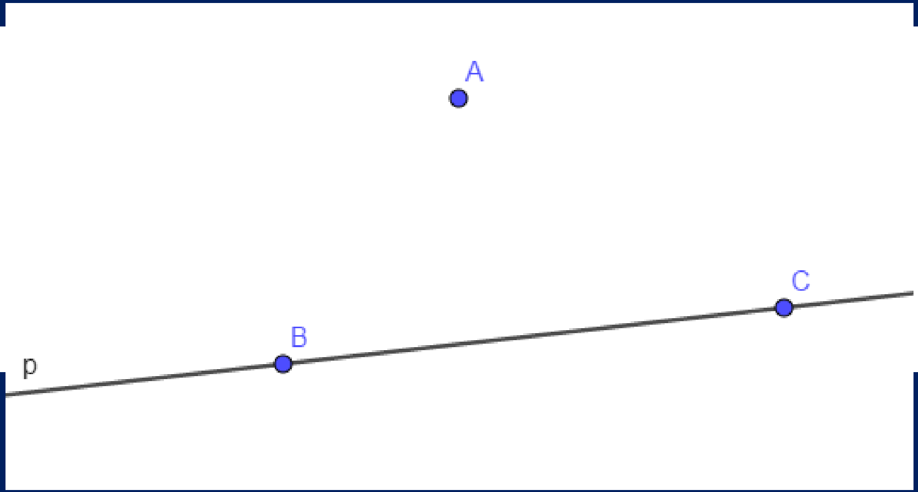
$\alpha \cap \beta = \{A, B\}$

ILLESZKEDÉSI AXIÓMÁK

- 8.axióma:I_8 *Létezik négy nem komplanáris pont.*

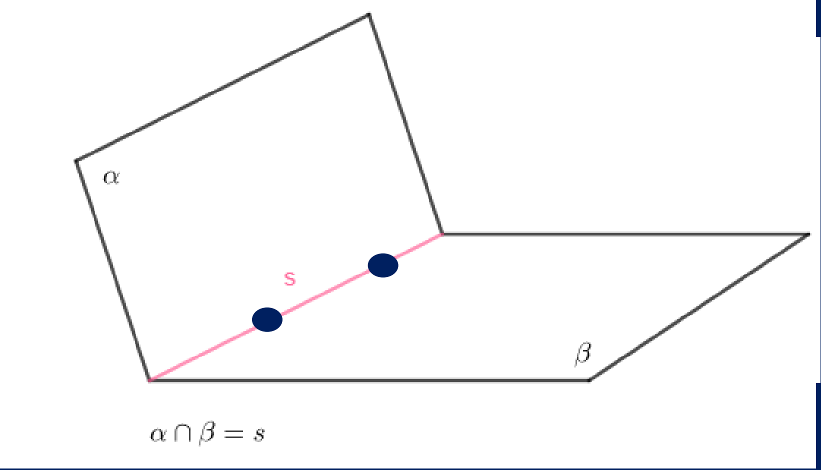


ILLESZKEDÉSI AXIÓMÁK KÖVETKEZMÉNYEI



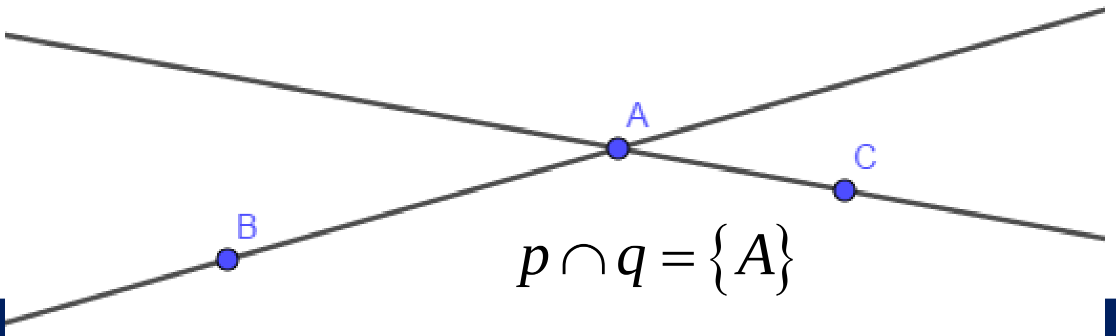
- *1.Tétel:* Ha az A pont nem illeszkedik p egyeneshez, akkor pontosan egy sík létezik , amely tartalmazza az A pontot és a *p* egyenest.
- *Bizonyítás*: Az I_2 axióma alapján a *p* egyenes tartalmaz legalább két pontot. Jelölje őket B és C. Ha az A, B, C pontok kollineárisak lennének, akkor egy egyeneshez illeszkednének. De az I_1 axióma alapján a B és C pontok egyértelműen meghatároznak egy *p* egyenest. Ám ekkor az A pont rajta volna a *p* egyenesen, amit már kizártunk a tételben.
- Tehát az A, B, C pontok nem kollineárisak, vagyis az I_4 szerint létezik pontosan egy sík, amely tartalmazza őket. Jelölje ezt α.
- Mivel a *p* egyenes B és C pontjai illeszkednek az α síkhoz, az I_6 szerint *p* egyenes minden pontja az α síkban van . Tehát az α sík tartalmazza a *p* egyenest és az A pontot is. Még azt kell igazolni, hogy pontosan egy ilyen sík létezik. Ha a β sík tartalmazná a *p* egyenest és az A pontot, akkor ez a sík tartalmazná B , C pontokat is, de ekkor I_4 szerint β nem különbözhet az α síktól.

ILLESZKEDÉSI AXIÓMÁK KÖVETKEZMÉNYEI



- *2.Tétel* Ha két különböző síknak van közös pontja, akkor azok egy egyenes mentén metszik egymást.
- *Bizonyítás:* Legyen ▯ és ▯ egy K közös pontú két különböző sík. Ekkor az I_7 axióma alapján van még legalább egy közös pontjuk, jelölje ezt a pontot L.
- Az I_1 alapján K és L pontok pontosan egy egyenest határoznak meg, és ennek a KL egyenesnek minden pontja I_6 szerint illeszkedik az ▯ és ▯ síkokhoz, tehát a közös metszetükhöz is.
- Igazolni kell még, hogy nincs a metszetben a KL egyenesen kívüli pont.
- Valóban, ha M ▯ KL pont az ▯ és ▯ síkok közös pontja lenne, akkor az előző tétel alapján létezne egyetlen sík amely tartalmazza az M pontot és a KL egyenest. Ez azonban lehetetlen, mert a feltételek szerint az ▯ és ▯ síkok különbözőek.
- Tehát az ▯ és ▯ síkok metszete a KL egyenes.

ILLESZKEDÉSI AXIÓMÁK KÖVETKEZMÉNYEI

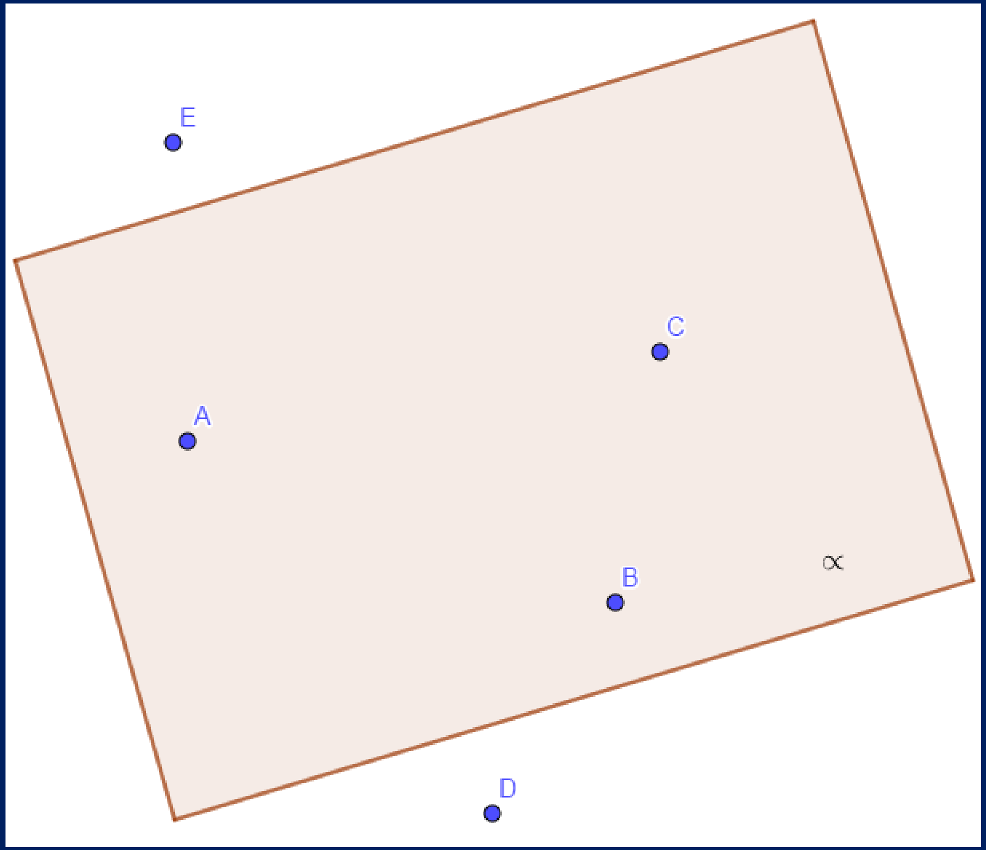


- *3.Tétel:* Két egymást metsző egyenes egyértelműen meghatároz egy síkot, és ez a sík tartalmazza a *két* egyenest.
- *Bizonyítás*: Az I_2 axióma alapján a *p* és q egyenesek tartalmaznak legalább két-két pontot.
- Jelölje őket B és C. Mivel az A, B, C pontok nem kollineárisak , akkor az I_4 szerint létezik pontosan egy sík, amely tartalmazza őket. Jelölje ezt α.
- Mivel a *p* egyenes B és A pontjai illeszkednek az α síkhoz, a *q* egyenes C és A pontjai illeszkednek az α síkhoz , ezért az I_6 szerint *p* ás q egyenesek minden pontja az α síkban van .
- Tehát az α sík tartalmazza a *p és q* egyeneseket.

FELADATOK

$$\alpha_1 = (A, B, C) \quad \alpha_4 = (A, C, D) \quad \alpha_7 = (B, C, D)$$
$$\alpha_2 = (A, B, D) \quad \alpha_5 = (A, C, E) \quad \alpha_8 = (B, C, E) \quad \alpha_{10} = (C, D, E)$$
$$\alpha_3 = (A, B, E) \quad \alpha_6 = (A, D, E) \quad \alpha_9 = (B, D, E)$$

- 1. Hány síkot határoz meg öt pont, ha közülük bármely négy nem komplanáris?

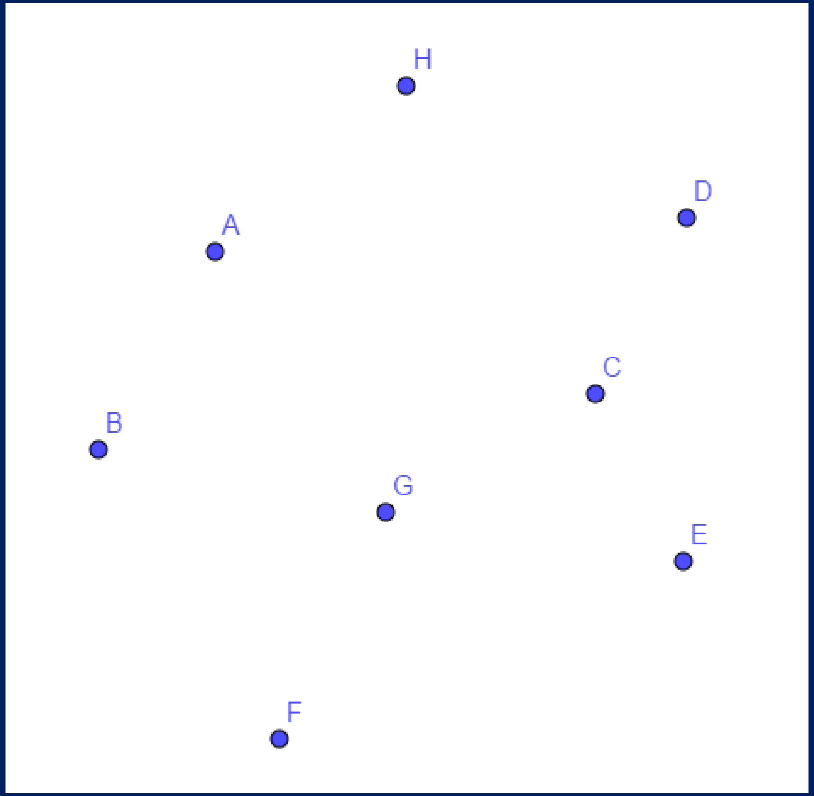


FELADATOK

$$szakaszok: 7+6+5+4+3+2+1=28$$

$$háromszögek: \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6}=56$$

- 2. Adott nyolc pont a térben. Hány szakaszt illetve háromszöget határoznak meg?

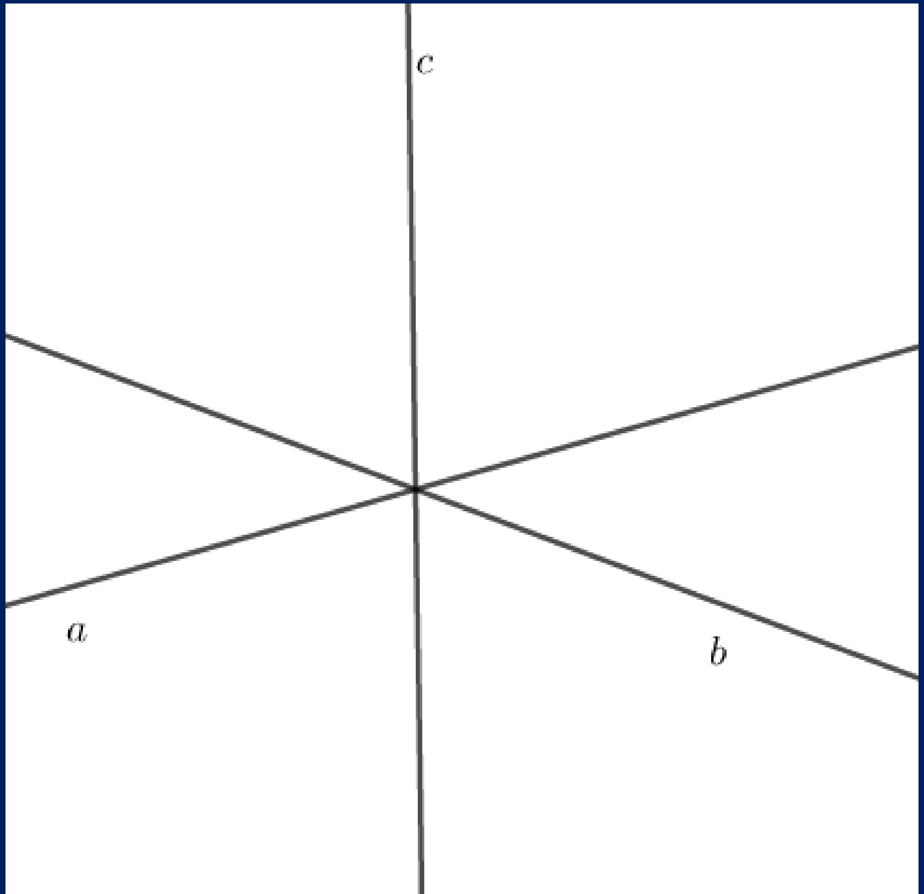


$$ABC\Delta = ACB\Delta = BAC\Delta = BCA\Delta = CAB\Delta = CBA\Delta$$

FELADATOK

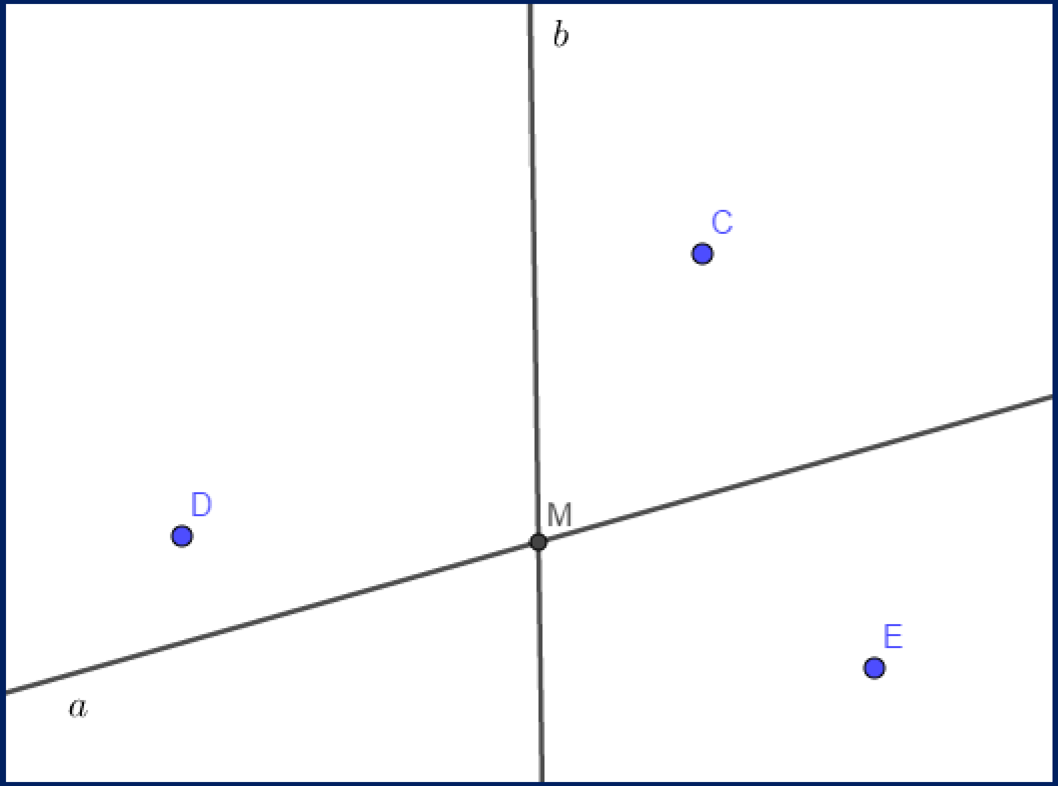
$$síkok: \alpha = (a,b) \quad \beta = (a,c) \quad \gamma = (b,c)$$

- 3. Hány síkot határoz meg három nem komplanáris, egy közös ponttal rendelkező egyenes?



FELADATOK

- 4. Legfeljebb hány síkot határoz meg két egymást metsző egyenes és rajtuk kívül lévő három nem kollineáris pont?



Az egyenesek metszéspontja legyen M

Összesen 11 síkot lehet meghatározni

Síkok az axióma alapján:
(C,D,E), (C,D,M) (C,E,M) (D,E,M)

Síkok az 1. tétel alapján
(a,C) (a,D) (a, E)
(b,C) (b,D) (b,E)

Sík a 3.tétel alapján
(a,b)

FELADATOK

- 5. Legalább hány pont határoz meg 55 egyenest?

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}=55$$

$$n^2-n=110$$

$$n^2-n+\frac{1}{4}=110+\frac{1}{4}$$

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{441}{4}=\left(\frac{21}{2}\right)^2$$

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{21}{2}\right)$$

$$n=11$$

ellenőrzés

$$\frac{11\cdot(11-1)}{2}=11\cdot5=55$$

Köszönöm a figyelmet