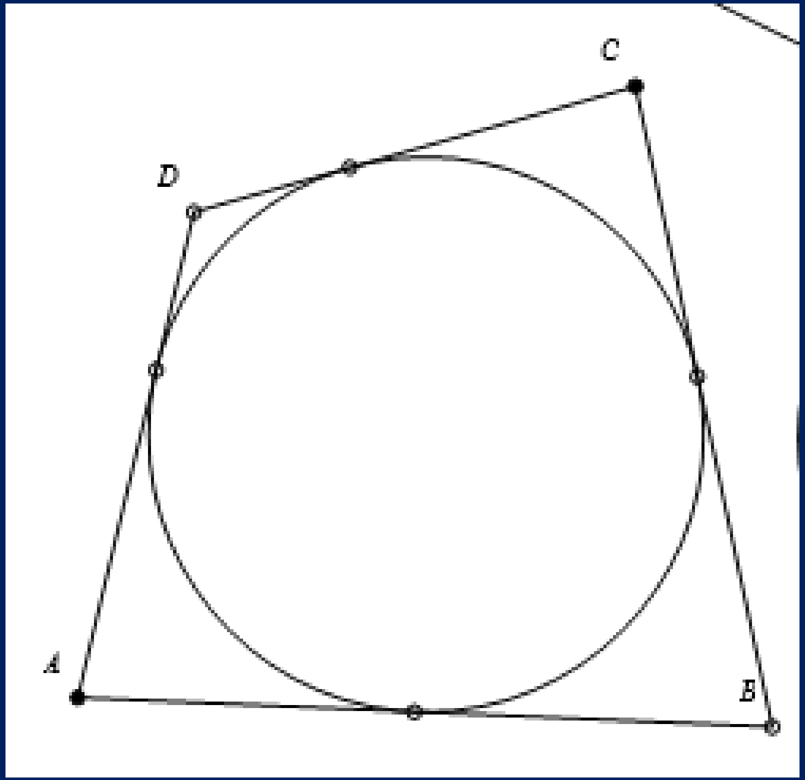
Matematika

a középiskolák első osztálya számára

HÚRNÉGYSZÖG ÉS ÉRINTŐNÉGYSZÖG

ÉRINTŐNÉGYSZÖG

- Azt a négyszöget, amelynek minden oldalát egy kör érintői alkotják, vagyis a négyszögbe szerkeszthető kör, *érintőnégyszög*nek nevezzük



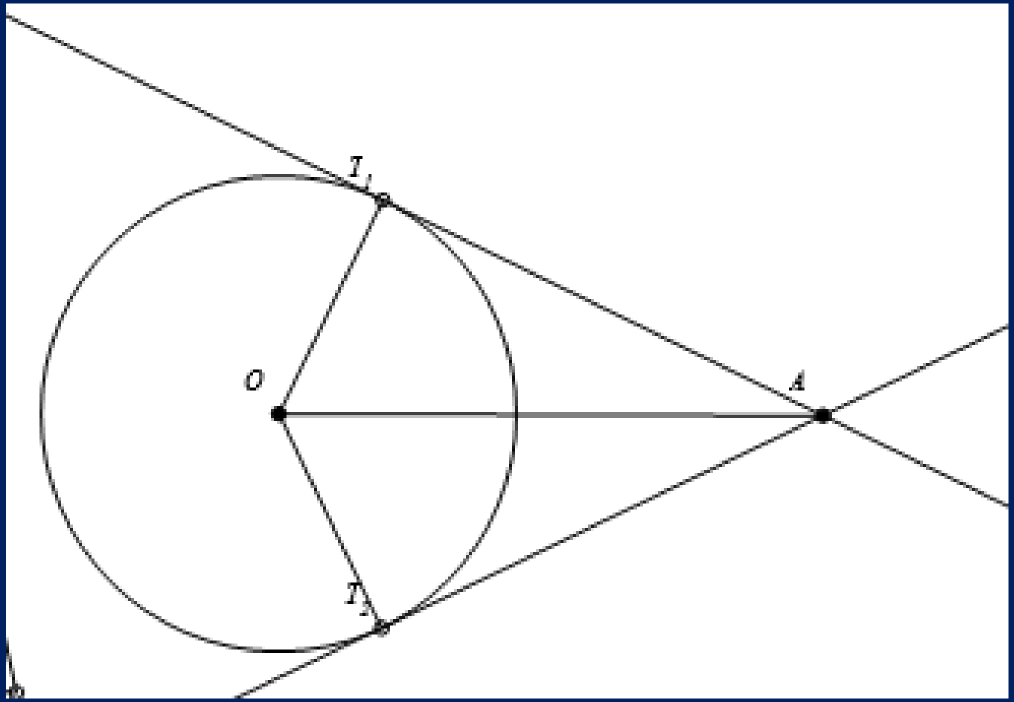
ÉRINTŐSZAKASZ

Tétel: Az adott pontból az adott körhöz szerkesztett érintőszakaszok egybevágók.

Bizonyítás : Legyenek a *k* (O, r) kör A pontból szerkesztett érintői AT_1 és AT_2, ahol T_1 és T_2 az érintési pontok.

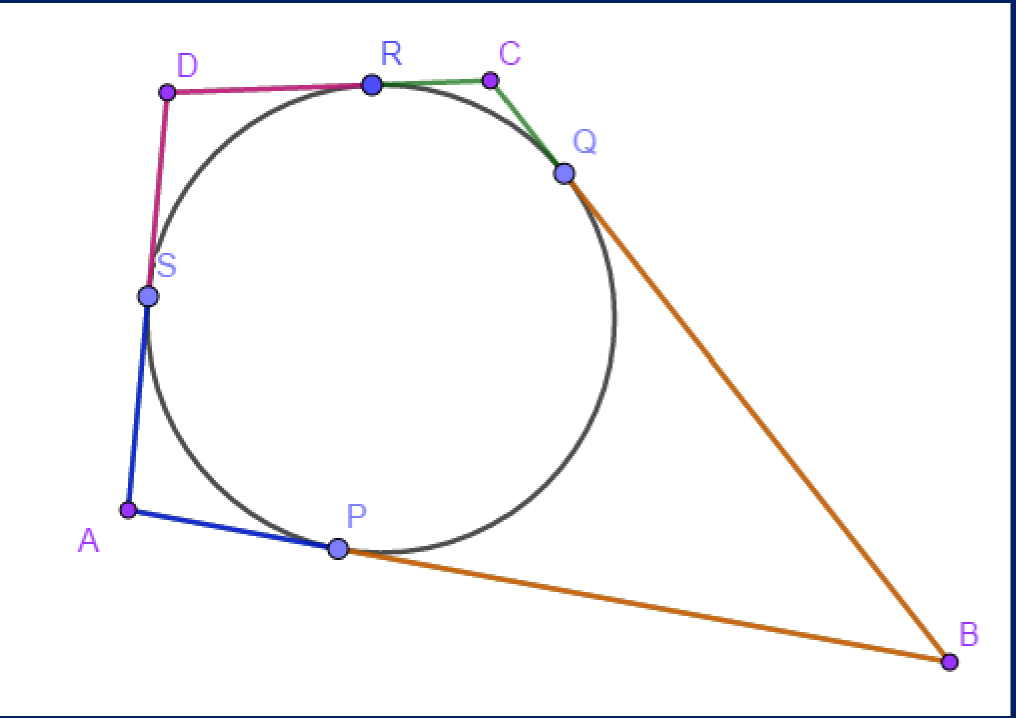
Ekkor az AT_1O és AT_2O derékszögű háromszögek egybevágók, mert AO átfogójuk közös, az OT_1 és OT_2 befogók pedig egybevágók a kör sugarával.

Tehát $AT_1 \cong AT_2$



ÉRINTŐNÉGYSZÖG

Tétel: Az ABCD négyszög akkor és csakis akkor érintőnégyszög, ha szemköztes oldalainak összege egyenlő, azaz $AB + CD = BC + AD$.



Bizonyítás : Tegyük fel, hogy ABCD négyszög érintőnégyszög.

Legyenek a P, Q, R, S pontok rendre a beleírható *k* kör és az AB, BC, CD, DA oldalak érintési pontjai.

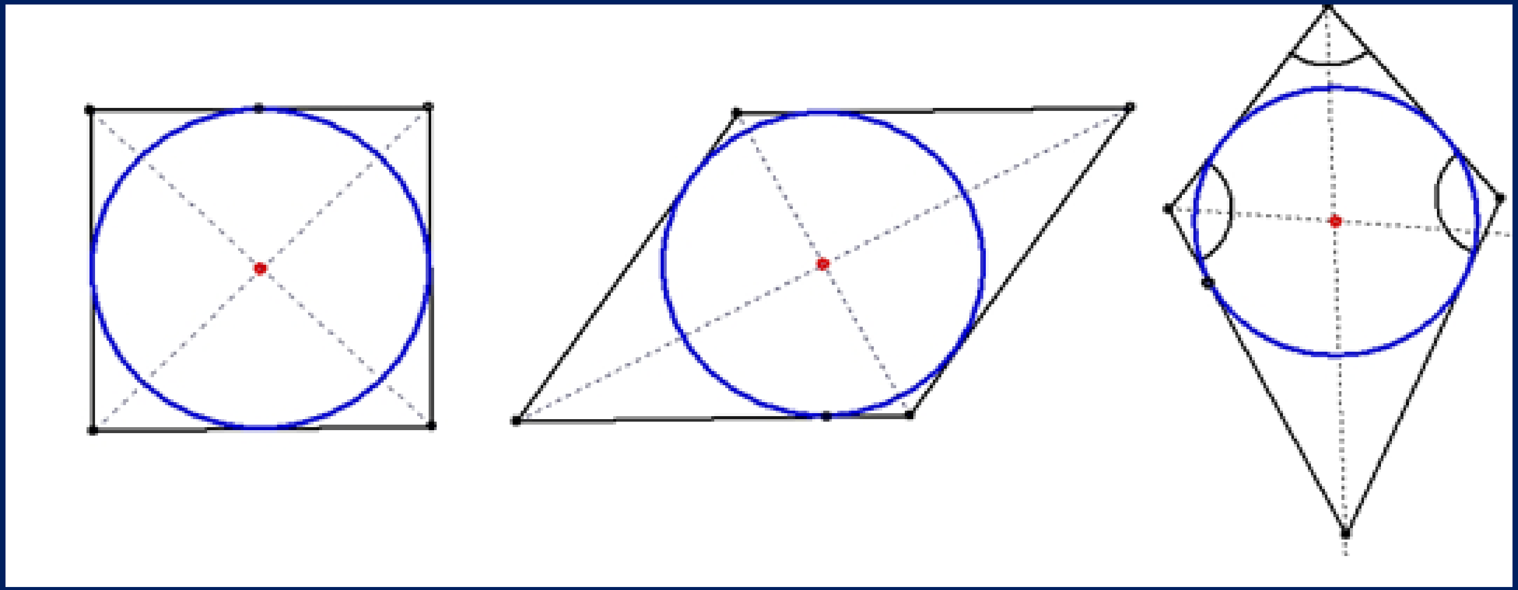
Mivel az érintőszakaszok egybevágók, ezért $AP \cong AS$, $BP \cong BQ$, $CQ \cong CR$, $DR \cong DS$.

Ezek alapján: $AP + PB + CR + RD = AS + SD + BQ + QC$

azaz $AB + CD = AD + BC$.

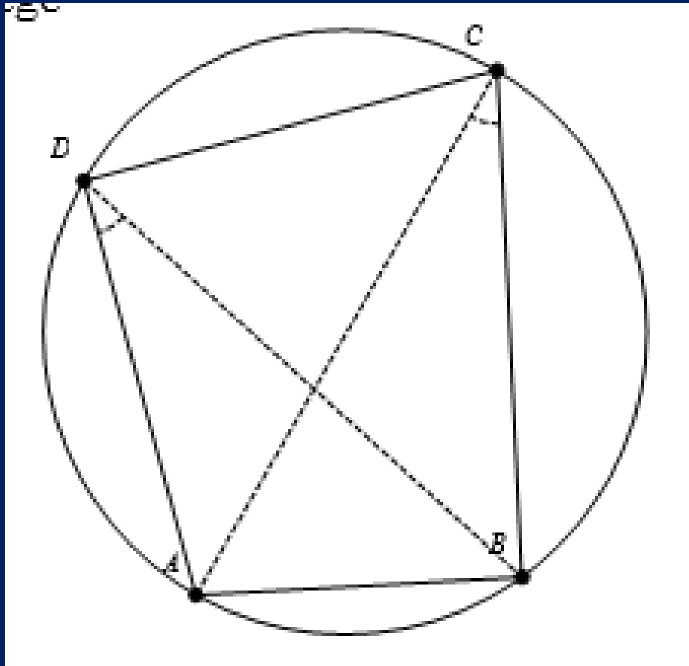
ÉRINTŐNÉGYSZÖGEK

- *A   négyzetbe, rombuszba és deltoidba szerkeszthető belülírt kör.*



HÚRNÉGYSZÖG

Azt a négyszöget, amely köré kört szerkeszthetünk, azaz a négyszög minden oldala ugyanazon kör húrja, *húrnégyszög*nek nevezzük



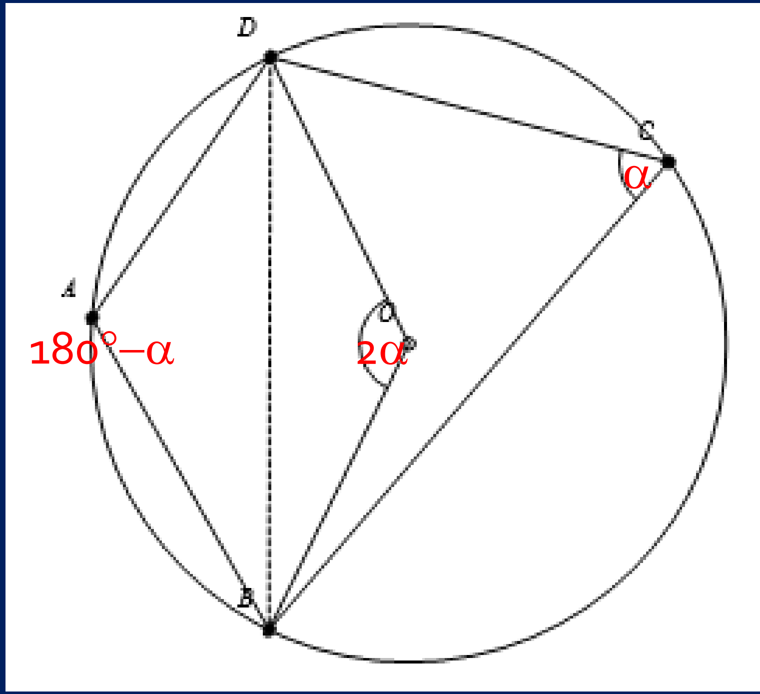
HÚRNÉGYSZÖG

- *Tétel:* A konvex négyszög akkor és csakis akkor húrnégyszög, ha két szemközti szöge kiegészítő szög. (szuplemens)
- *Bizonyítás:* $\Rightarrow$. Feltételezzük, hogy az ABCD négyszög húrnégyszög.

Mivel ez konvex négyszög, az A és C csúcsa a BD átló különböző oldalán van.

Az előbbiek alapján tudjuk, hogy a négyszögben BAD∠ és BCD ∠ kiegészítő szögek.

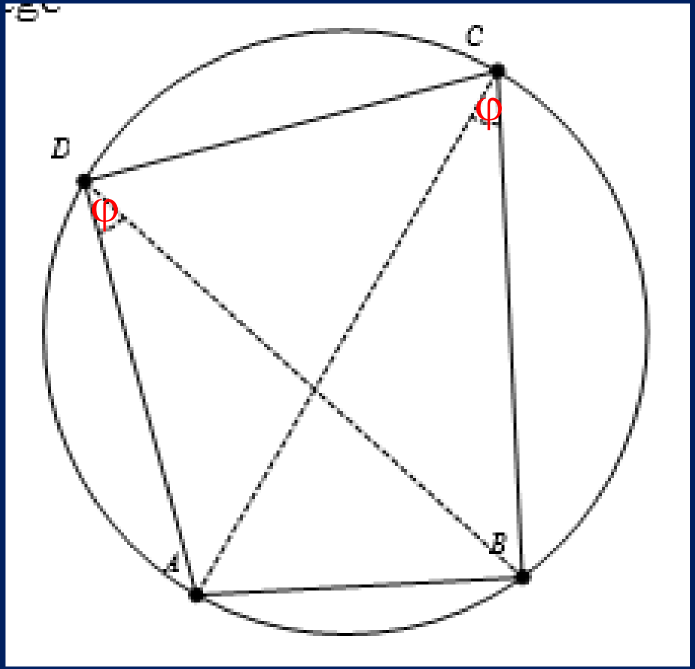
- $\Leftarrow$. Feltételezzük, hogy az ABCD négyszög szemköztes szögei kiegészítő szögek. Legyen a *k* kör az ABD háromszög körülírt köre. Ekkor a negyedik C csúcsból a BD húr akkora szög alatt látszik, amely az A csúcsnál lévő szöget egyenesszögre egészíti ki, tehát a C pont is rajta van a körön



HÚRNÉGYSZÖG

- *Tétel:* Ha az ABCD konvex négyszögben $ACB\angle \cong ADB\angle$, akkor ez húrnégyszög.

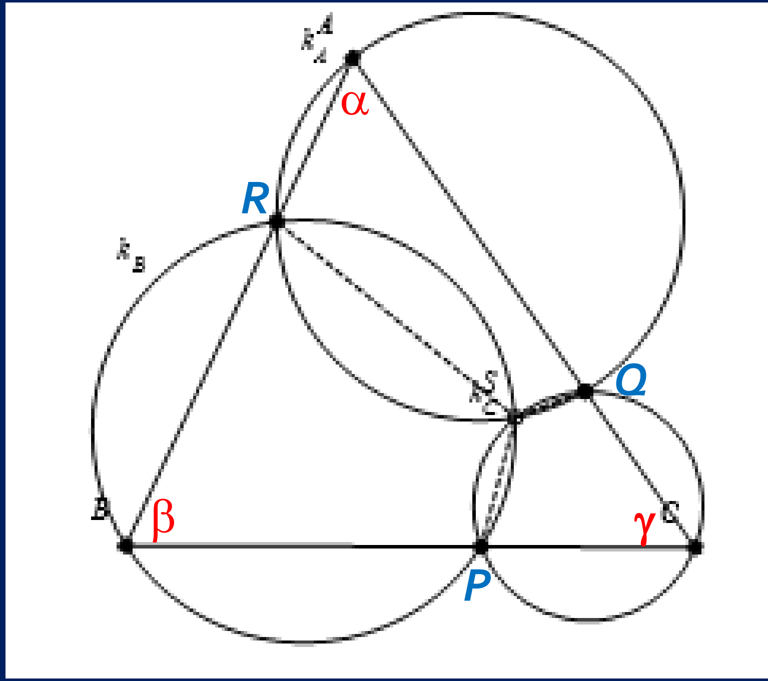
- Bizonyítás: azon pontok mértani helye a síkban, amelyekből AB szakasz egyenlő szög alatt látszik az ABC körív



1. FELADAT

Legyenek a P, Q, R pontok rendre az ABC háromszög BC, AC, AB oldalainak tetszőleges pontjai. Igazold, hogy az AQR, PBR, PQC háromszögek köré írt körök egy pontban metszik egymást.

Megoldás: Legyenek az AQR, PBR, PQC háromszögek köré írt körök k_A, k_B, k_C és jelölje az ABC háromszög belső szögeit rendre α, β, γ . Legyen az S pont a k_B és k_C körök második metszéspontja (hasonló a bizonyítás akkor is, ha S=P).



Ekkor a BPSR és PCQS húrnégyszögek,

ezért $RSP\angle = 180° - \beta$ és $QSP\angle = 180° - \gamma$.

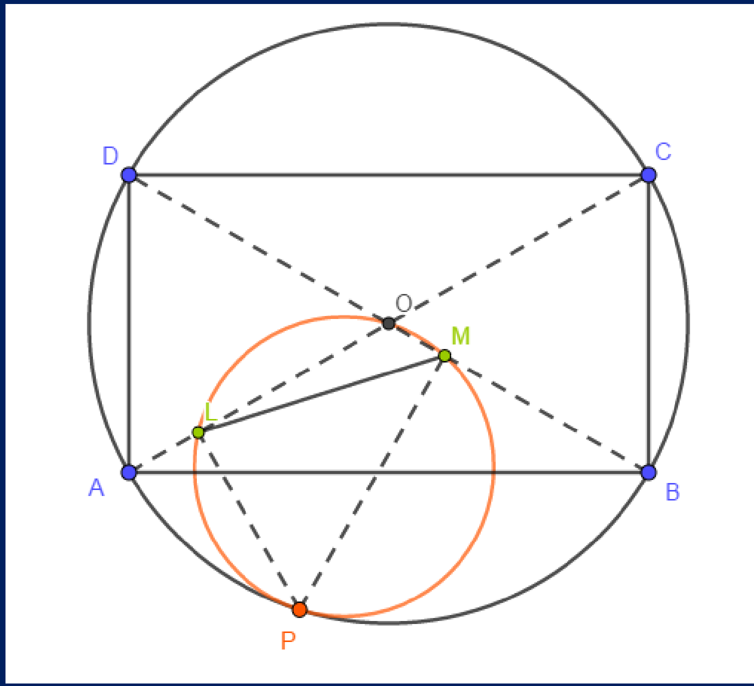
Ebből következik, hogy $RSQ\angle = \beta + \gamma$

Akkor $RAQ\angle + RSQ\angle = \alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Tehát az ARSQ is húrnégyszög, vagyis köréje is szerkeszthető kör, de ez pontosan a k_A kör, amit az AQR háromszög köré írtunk. Tehát ezek a körök metszik egymást az S pontban

2.FELADAT

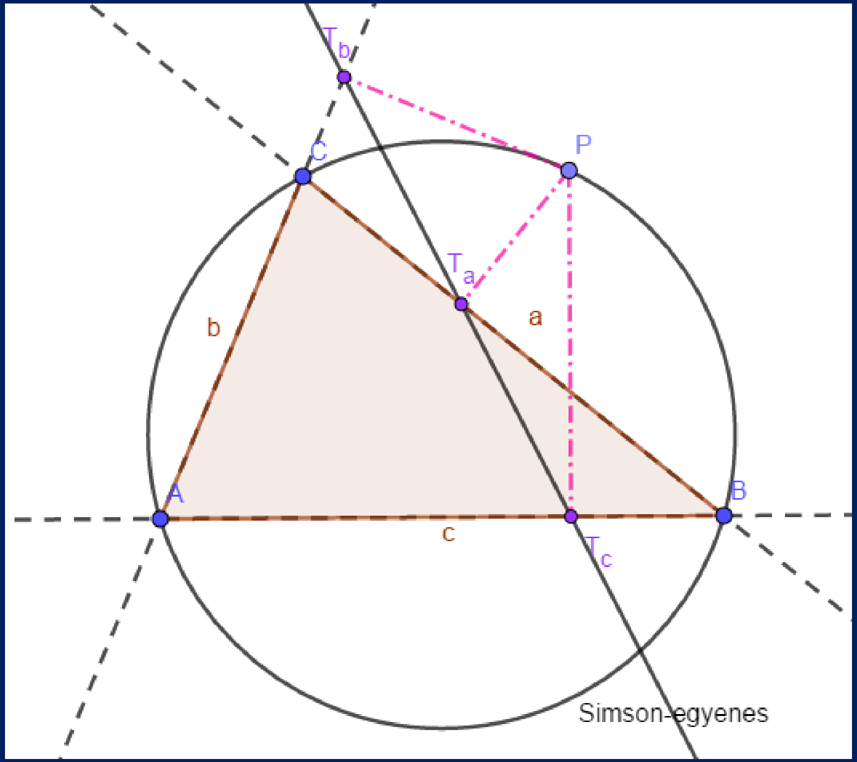
- Legyen a P pont az ABCD téglalap köré írt *k* kör kisebbik AB ívén, és legyenek L és M pontok a P pontból az AC és BD átlókra szerkesztett merőlegesek talppontjai. Igazold, hogy az LM szakasz hossza független a P pont választásától.
- *Megoldás:* Legyen O pont a *k* kör középpontja. Ekkor a PMOL négyszög húrnégyszög, mert OLP∠ + OMP∠ = 180°.
- Mivel az OLP∠ és OMP ∠ derékszögek, az OP átmérő fölé *l* kört szerkesztünk, amely a PMOL négyszög körülírt köre, de az OP szakasz a *k* körnek is sugara.
- Ekkor az LM szakasz az *l* körben az AOB∠ kerületi szögnek megfelelő húr.
- Tehát a P pont választásától függetlenül, LM húr az OA átmérőjű kör AOB∠ szögének felel meg (illetve a megfelelő állandó középponti szögnek). Az egybevágó körök egybevágó középponti szögeihez egybevágó húrok tartoznak, ezért az LM szakasz hossza nem függ a P pont választásától



3.FELADAT

- A háromszög körülírható körének egy tetszőleges pontjából az oldalak hordozóegyeneseire szerkesztett merőlegesek talppontjai kollineárisak

(*Simson-egyenes*).



Köszönöm a megtisztelő figyelmet

Ez a bemutató a húrnégyszög
és érintőnégyszög
tulajdonságaival foglalkozott