Matematika

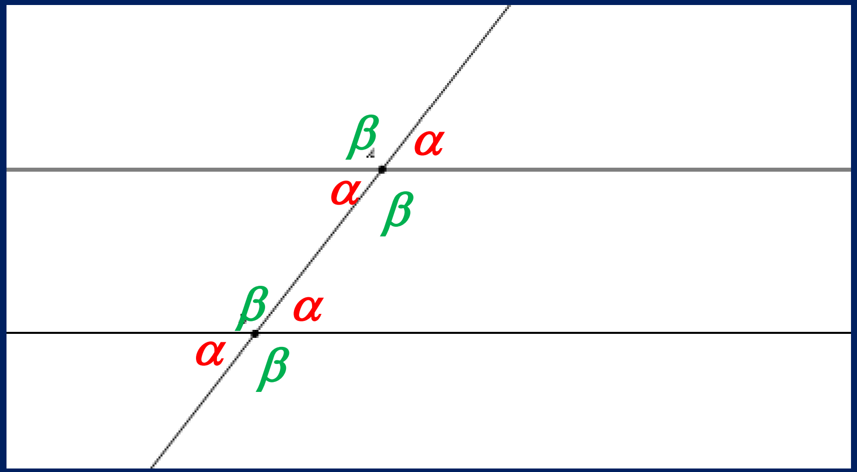
a középiskolák első osztálya számára

HÁROMSZÖG BELSŐ SZÖGEINEK ÖSSZEGE

merőleges szárú szögek

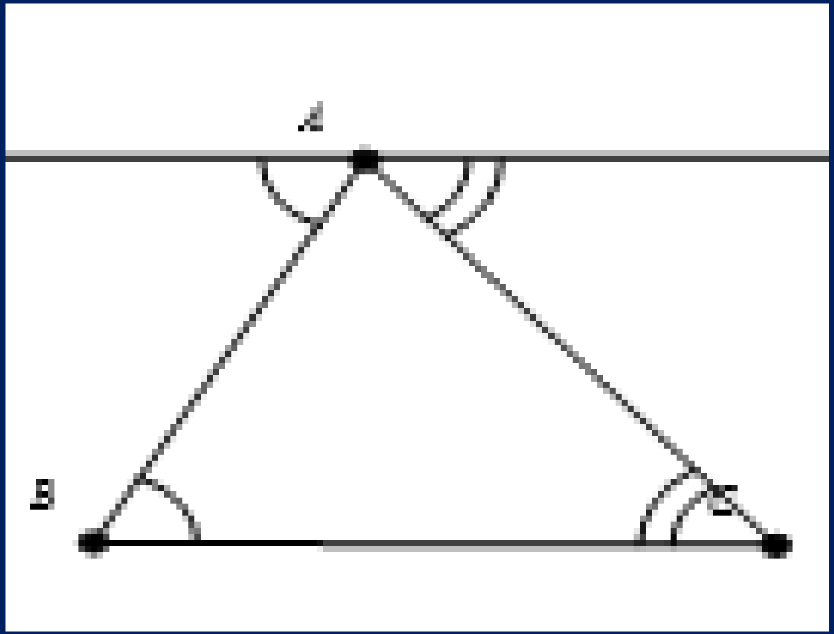
SZÖGEK

- Ha két párhuzamos egyenest metszünk egy harmadik egyenessel, akkor a kapott szögek:
- Párhuzamos szárú szögek
- (i) ha mindkét szög hegyes illetve tompa, akkor ezek egybevágóak;
- (ii) ha egyik hegyes, másik tompa, akkor egymás kiegészítőszögei
- Váltószögek
- ha mindkét szög hegyes illetve tompa, akkor ezek egybevágóak;
- ha egyik hegyes, másik tompa, akkor egymás kiegészítőszögei
- csúcsszögek



HÁROMSZÖG BELSŐ SZÖGEINEK ÖSSZEGE

- *Tétel:* A háromszög belső szögeinek összege egyenlő az egyenesszöggel, vagyis ha α, β, γ egy háromszög belső szögei, akkor $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



KÖVETKEZMÉNYEK

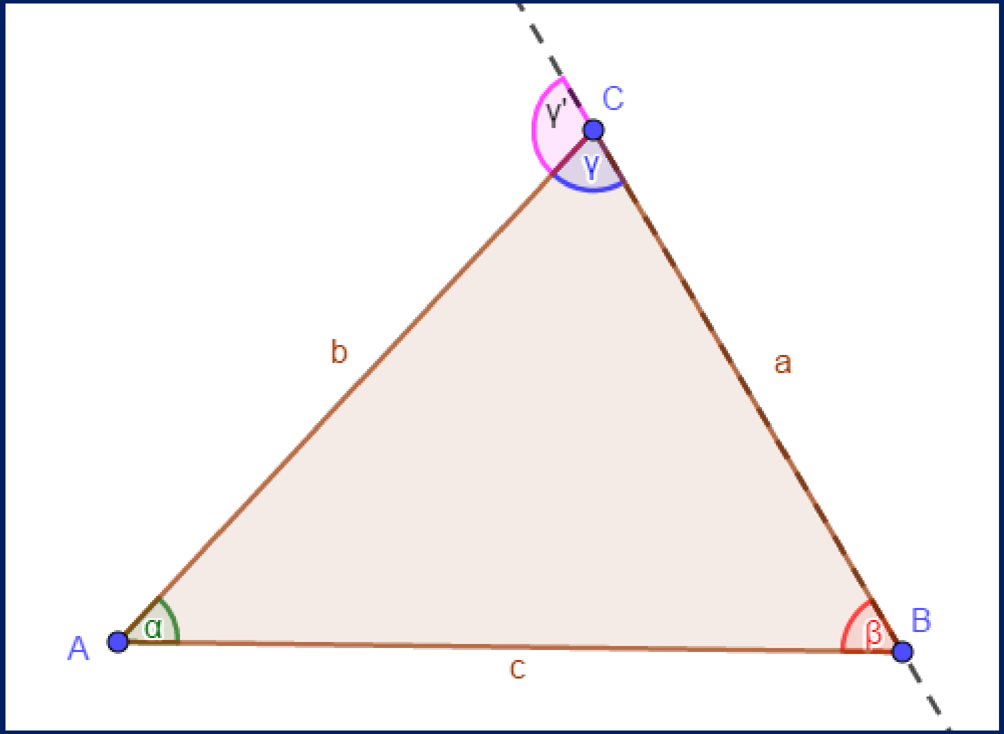
Következmény: A háromszög külső szöge egyenlő a nem szomszédos belső szögek összegével.

Bizonyítás : Legyen γ' egy háromszög külső szöge, és γ a szomszédos belső szög, α és β a másik két belső szög.

Az előző tétel alapján $\alpha + \beta + \gamma = 180°$,

de $\gamma + \gamma' = 180°$, ebből következik,

hogy $\gamma' = \alpha + \beta$, amit igazolni kellett.



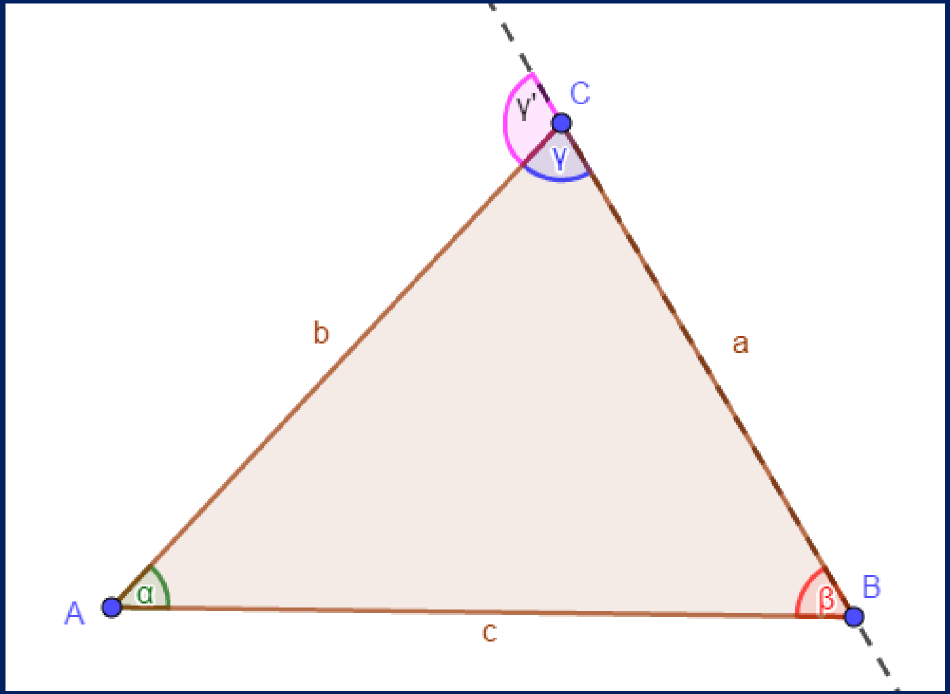
KÖVETKEZMÉNYEK

Következmény: A háromszög külső szöge nagyobb bármelyik nem szomszédos belső szögnél.

$\alpha+\beta=\gamma'$

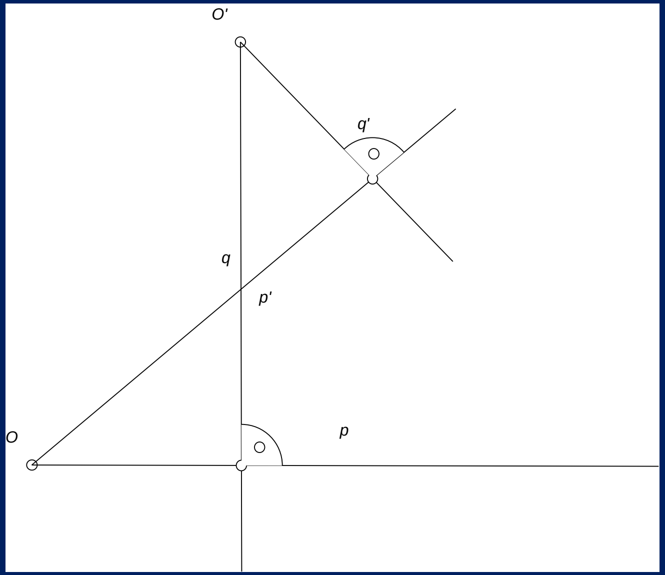
Bizonyítás: Az előző állításból következik, mert a két szög összege nagyobb mindkét szögnél.

$\gamma'>\alpha$ és $\gamma'>\beta$



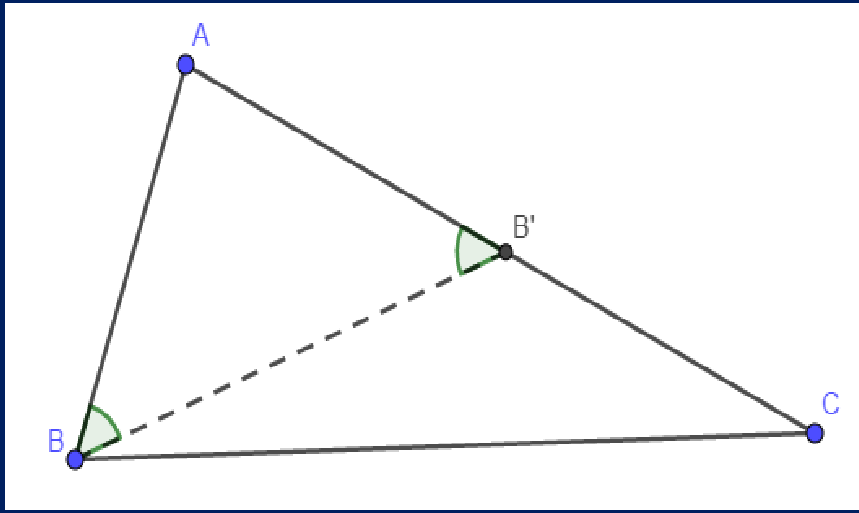
MERŐLEGES SZÁRÚ SZÖGEK

- *Tétel:* Legyenek pOq és $p'O'q'$ konvex szögek egy síkban úgy, hogy a száraik egymásra merőlegesek, vagyis $p \perp p'$ és $q \perp q'$. Ekkor érvényes, hogy:
- ha mindkét szög hegyesszög, akkor egybevágóak egymással;
- ha egyik szög hegyesszög, a másik szög tompaszög, akkor egymás kiegészítő szögei .



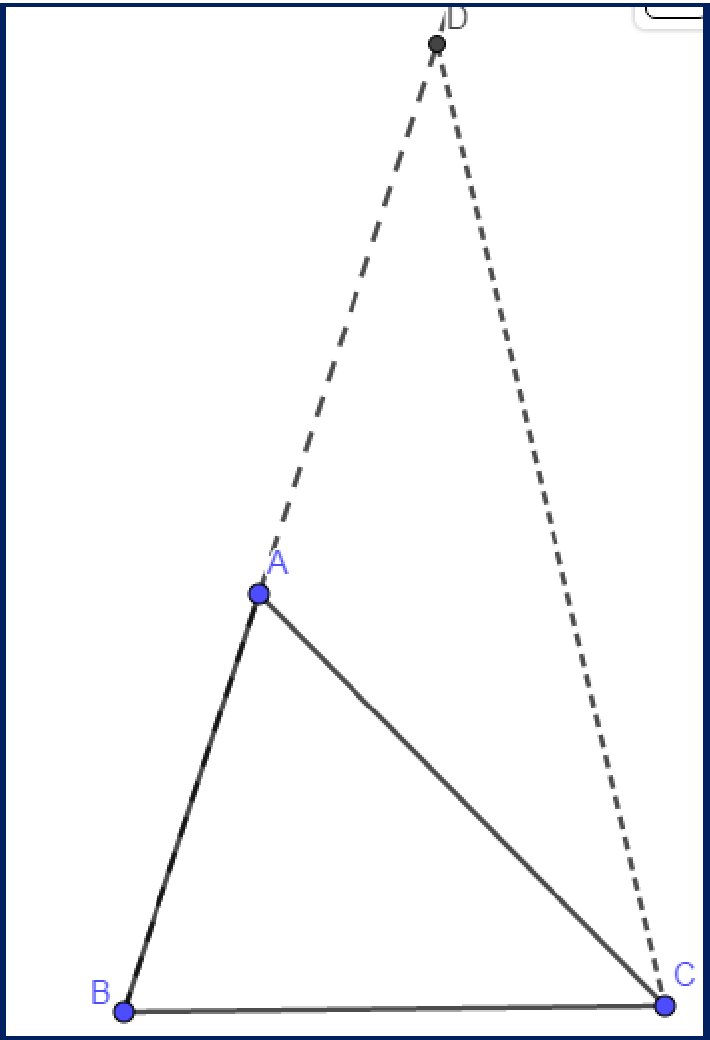
HÁROMSZÖGEGYENLŐTLENSÉGEK

- *Tétel:* A háromszögben nagyobb oldallal szemközt nagyobb szög fekszik, és fordítva, nagyobb szöggel szemközt nagyobb oldal van.
- *Bizonyítás:* Legyen az ABC háromszög AC oldala nagyobb, mint AB. Ekkor igazoljuk, hogy $ABC\angle > ACB\angle$. Mivel $AC > AB$, ezért az A és C csúcsok között létezik B' pont úgy, hogy $AB \cong AB'$.
- Ekkor ABB' háromszög egyenlő szárú, tehát $ABB'\angle \cong AB'B\angle$.
- Így BB' félegyenes az $ABC\angle$ szög belső tartományában van, tehát $ABC\angle > ABB'\angle$.
- Vagyis az $AB'B\angle$ szög a BCB' háromszög külső szöge, ezért nagyobb a vele nem szomszédos $B'CB$ belső szögnél. Felhasználva minden eddigi állítást: $ABC\angle > ABB'\angle \cong AB'B\angle > B'CB\angle = ACB\angle$. Tehát valóban $ABC\angle > ACB\angle$.
- Hasonlóan igazolható az állítás a másik irányban is



HÁROMSZÖGEGYENLŐTLENSÉGEK

- *Tétel:* A háromszög két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.
- *Bizonyítás:* Legyen ABC tetszőleges háromszög. Igazoljuk, hogy $AB + AC > BC$.
- Jelöljük D ponttal az AB hordozóegyenes olyan pontját, hogy $\mathscr{B}(B, A, D)$ és $AD \cong AC$.
- ADC háromszög egyenlő szárú, alapon fekvő szögei egybevágóak, ekkor $BDC\angle \cong ACD\angle$.
- Mivel a CA félegyenes a $DCB\angle$ szög belső tartományában van, ezért $ACD\angle < DCB\angle$. Így a $BDC\angle < DCB\angle$ is érvényes. Alkalmazzuk az előző tételt, kisebb oldallal szemközt kisebb szög fekszik: BCD háromszögre, ebből megállapítható, hogy $BC < BD = AB + AD = AB + AC$



HÁROMSZÖGEGYENLŐTLENSÉGEK

- Adott az ABC háromszög C csúcsánál lévő külső szögének szögfelezőjén egy M pont.

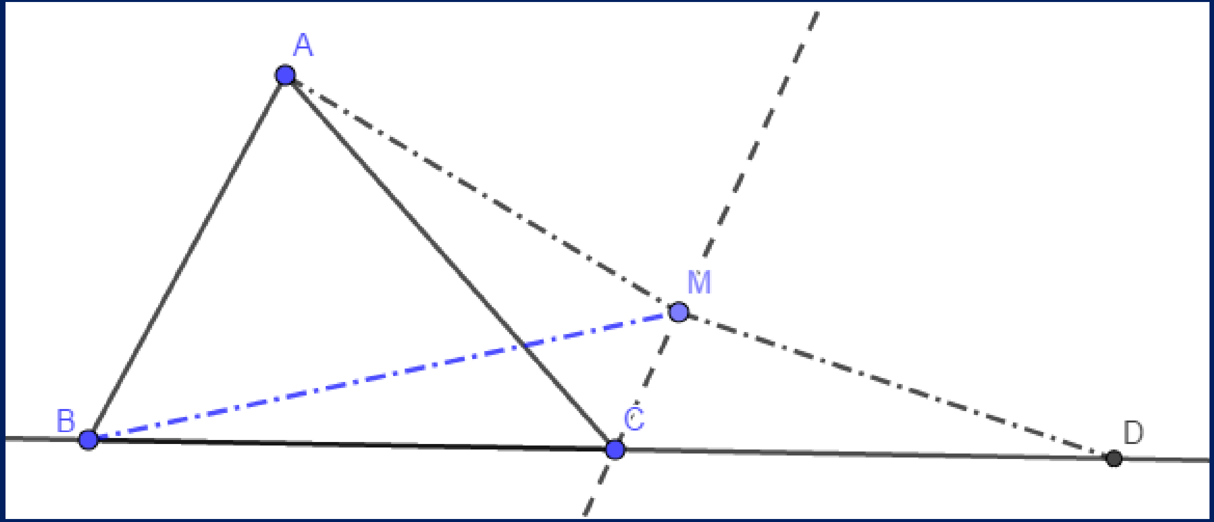
Igazold, hogy $MA + MB \geq CA + CB$.

- *Megoldás:* Legyen a D pont a BC félegyenes olyan pontja, hogy $AC \cong CD$ és $\mathscr{B}(B, C, D) \Rightarrow BD = CA + CB$.
- Mivel az ACM és DCM háromszögek egybevágók egymással, ezért az **OSZO** tétel alapján

$(AC \cong DC, CM \cong CM, ACM\angle \cong DCM\angle) \Rightarrow MA \cong MD$.

- Alkalmazzuk a háromszögegyenlőtlenséget MBD háromszögben,

$MA + MB = MD + MB \geq BD = CA + CB$.



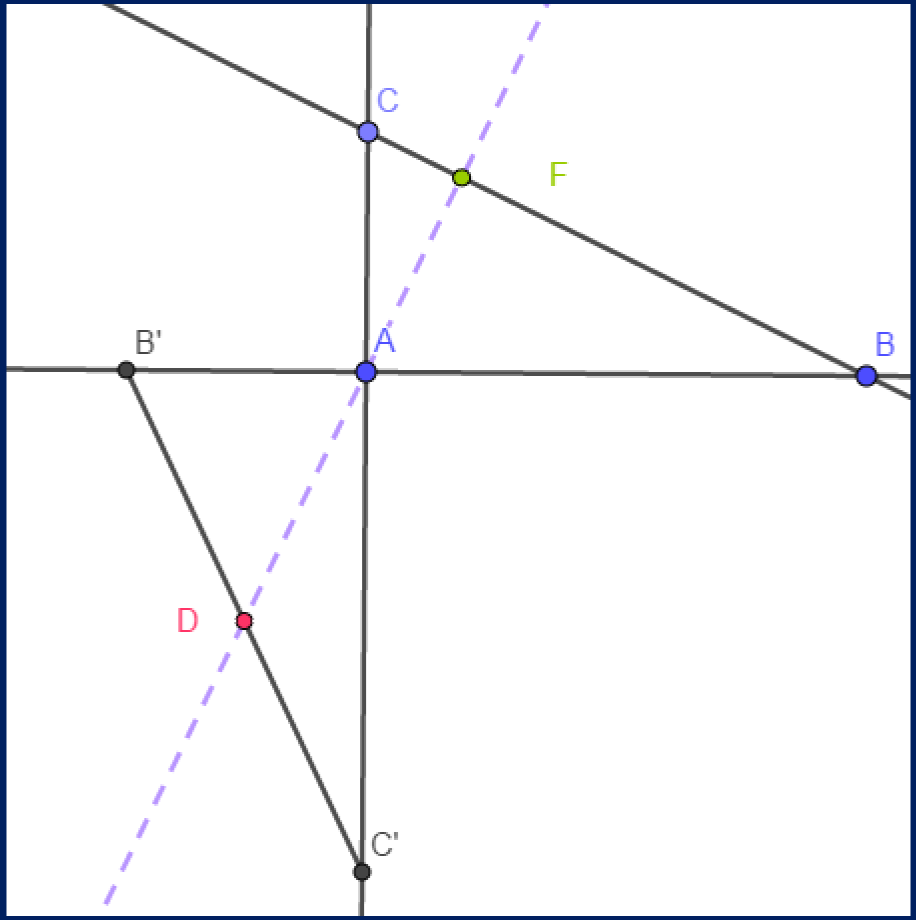
ALKALMAZÁS

Legyen *p* és *q* két egymásra merőleges egyenes, amelyek az A pontban metszik egymást.

Ha a B, B′ és C, C′ pontok a *p* és *q* egyenesek olyan pontjai,

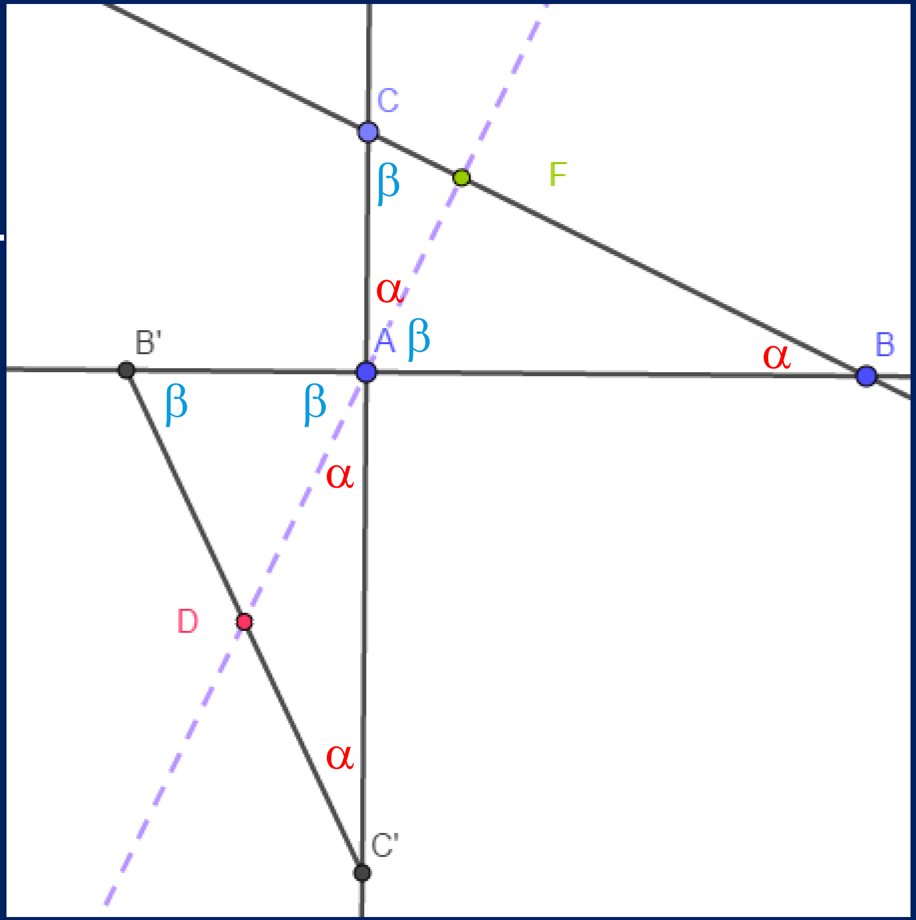
ahol $AB \cong AC'$, $AB' \cong AC$ és érvényes $\mathscr{B}(B, A, B')$ illetve $\mathscr{B}(C, A, C')$,

akkor bizonyítsd be, hogy az A pontból a BC egyenesre szerkesztett merőleges tartalmazza a B′C′ szakasz felezőpontját.



ALKALMAZÁS

- ***Bizonyítás:*** $ABC\Delta \cong AB'C'\Delta$ (OSzO tétel)
- Legyen AF merőleges BC egyenesre
- Legyen D pont az AF és B'C' egyenesek metszéspontja.
- CAF∠≅DAC'∠ csúcsszögek, tehát egybevágóak
- ACB∠ és ABC∠ komplemens szögek
- AC'B'∠ és AB'C'∠ komplemens szögek
- ADC'Δ és ADB'Δ háromszögek egyenlő szárúak, mert alapon fekvő szögeik egybevágóak.
- DC'≅DA≅DB' (AB'C'Δ derékszögű, körülírt körének középpontja D pont), tehát felezi a B'C' átfogót.



ALKALMAZÁS

- Számítsd ki a háromszög belső szögeit, ha az arányuk 3:7:8

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\alpha : \beta : \gamma = 3 : 7 : 8$$

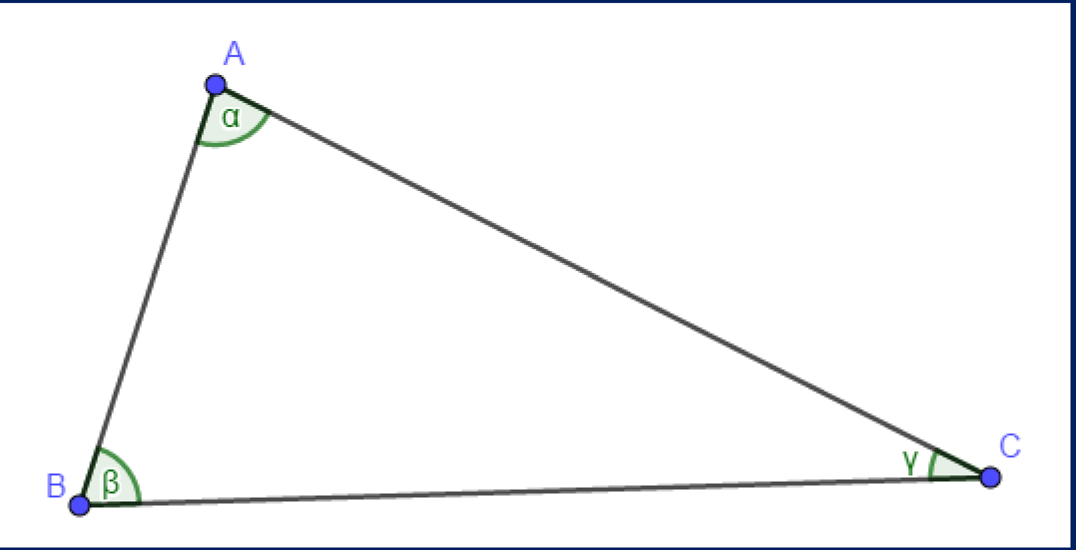
$$\alpha = 3k, \qquad \beta = 7k, \qquad \gamma = 8k$$

$$3k + 7k + 8k = 180°$$

$$18k = 180°$$

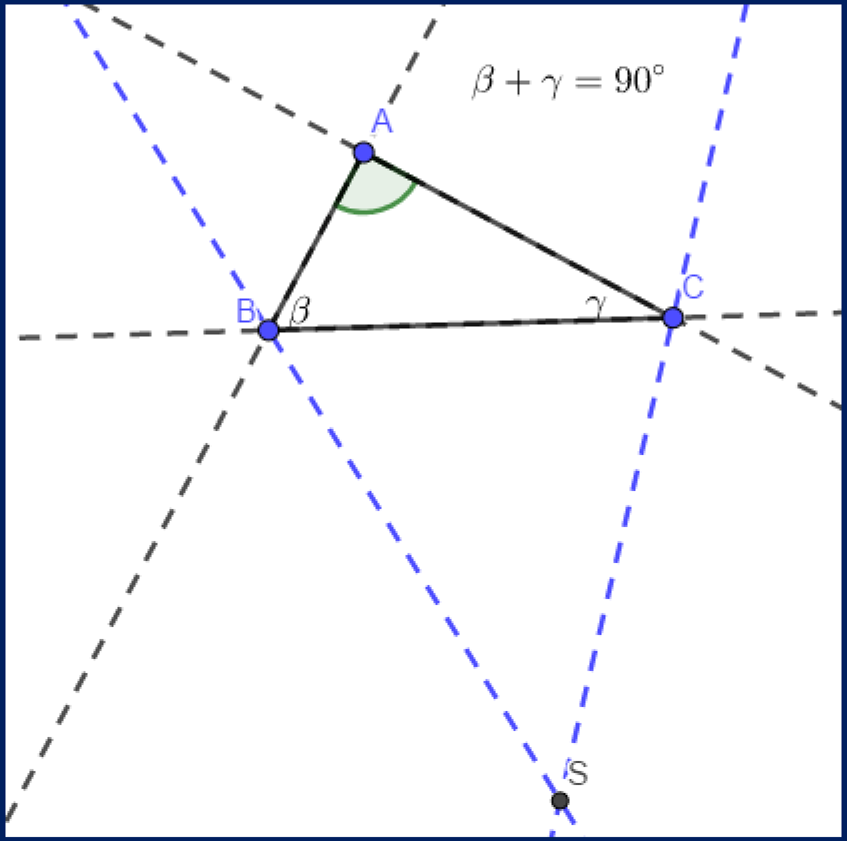
$$k = 10°$$

$$\alpha = 30°, \qquad \beta = 70°, \qquad \gamma = 80°$$



ALKALMAZÁS

- Számítsd ki, mekkora szöget zárnak be a derékszögű háromszög átfogójához tartozó külső szögek szögfelezői!



- B csúcsnál

$$\frac{180° - \beta}{2}$$

- C csúcsnál

$$\frac{180° - \gamma}{2}$$

BSC∠=$180° - \left(\frac{180° - \beta}{2} + \frac{180° - \gamma}{2} \right)$

BSC∠=$\frac{\beta+\gamma}{2} = 45°$

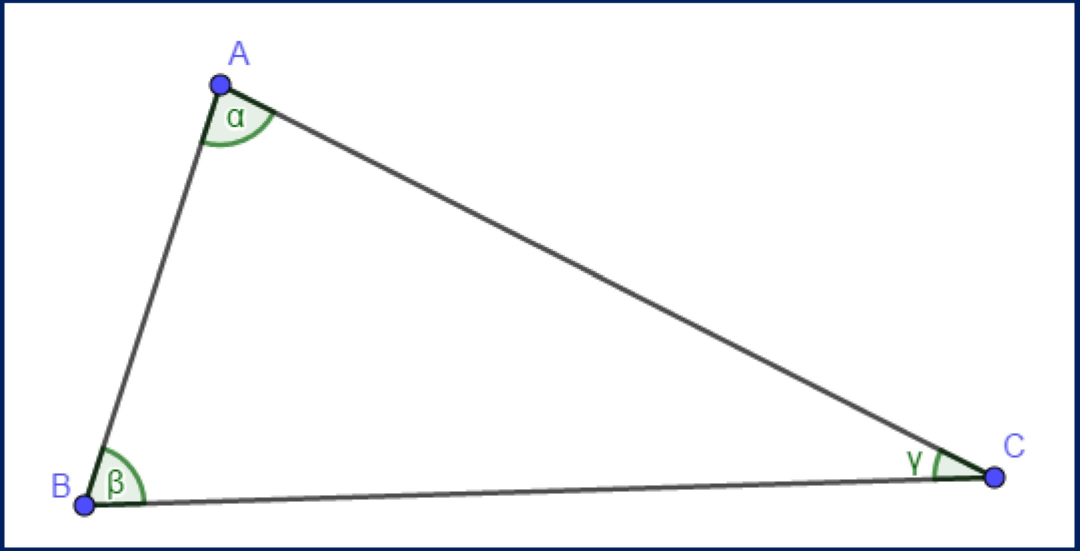
ALKALMAZÁS

- Az ABC háromszögben az A csúcsnál lévő külső szög 134°, a B csúcsnál lévő belső szög 62°. Számítsd ki a háromszög harmadik belső szögét!

$$\alpha = 180° - 134° = 46°$$

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$
$$\gamma = 180° - (46° + 62°)$$

$$\gamma = 180° - 108°$$
$$\gamma = 72°$$



Köszönöm a megtisztelő figyelmüket

Ez a bemutató a háromszög

belső szögeinek összegével foglalkozott