

# ***OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK***

# OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

## AZ OSZTHATÓSÁG FOGALMA

### DEFINÍCIÓ:

Az  $a, b$  természetes számok esetén az  $a$  számot  $b$  osztójának nevezzük, ha létezik olyan  $q$  természetes szám, hogy fennáll az  $aq = b$  egyenlőség. Ekkor azt mondjuk: „ $b$  osztható  $a$ -val”. Ennek rövid jelölése  $a \mid b$  (Olvasd: „ $a$  osztója  $b$ -nek” vagy „ $b$  osztható  $a$ -val”).)

Például:  $12 = 3 \cdot 4$  alapján  $3 \mid 12$  vagy  $12$  osztható  $3$ -mal és  $4 \mid 12$  vagy  $12$  osztható  $4$ -gyel.

# OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

## AZ OSZTHATÓSÁG TULAJDONSÁGAI

- ▶  $a \mid a$ , azaz bármely természetes szám osztható önmagával.
- ▶  $1 \mid a$ , azaz bármely természetes szám osztható 1-gyel.

- Tetszőleges  $a$  természetes szám nem valódi osztói  $1$  és  $a$ , a többi osztóját valódi osztónak nevezzük.
- Azokat a számokat, melyeknek csak 2 osztójuk van (1 és önmaguk) **prímszámoknak**, amelyeknek viszont 2-nél több osztójuk van, **összetett számoknak** nevezzük.

Pl. Az 5 prímszám, mivel csak 1-gyel és 5-tel osztható.

A 12 összetett szám, mivel osztható 1-gyel, 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 6-tal és önmagával, tehát kettőnél több osztója van.

# OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

## AZ ELSŐ SZÁZAS PRÍMSZÁMAI

<del>91</del>	<del>92</del>	<del>93</del>	<del>94</del>	<del>95</del>	<del>96</del>	97	<del>98</del>	<del>99</del>	<del>100</del>
<del>81</del>	<del>82</del>	83	<del>84</del>	<del>85</del>	<del>86</del>	<del>87</del>	<del>88</del>	89	<del>90</del>
71	<del>72</del>	73	<del>74</del>	<del>75</del>	<del>76</del>	<del>77</del>	<del>78</del>	79	<del>80</del>
61	<del>62</del>	<del>63</del>	<del>64</del>	<del>65</del>	<del>66</del>	67	<del>68</del>	<del>69</del>	<del>70</del>
<del>51</del>	<del>52</del>	53	<del>54</del>	<del>55</del>	<del>56</del>	<del>57</del>	<del>58</del>	59	<del>60</del>
41	<del>42</del>	43	<del>44</del>	<del>45</del>	<del>46</del>	47	<del>48</del>	<del>49</del>	<del>50</del>
31	<del>32</del>	<del>33</del>	<del>34</del>	<del>35</del>	<del>36</del>	37	<del>38</del>	<del>39</del>	<del>40</del>
<del>21</del>	<del>22</del>	23	<del>24</del>	<del>25</del>	<del>26</del>	<del>27</del>	<del>28</del>	29	<del>30</del>
11	<del>12</del>	13	<del>14</del>	<del>15</del>	<del>16</del>	17	<del>18</del>	19	<del>20</del>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Eratoszthenész  
szitája

# OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

## AZ OSZTHATÓSÁG TULAJDONSÁGAI

► *Ha  $a \mid b$  és  $b \mid c$ , akkor  $a \mid c$ .*

Bizonyítás:

A definícióból következik, ha  $a \mid b$ , akkor van olyan  $q$  természetes szám, amelyre  $b = aq$ , ezért fennáll:  $aq \mid c$ .

Ez azt jelenti, hogy van olyan  $q'$  természetes szám, amelyre  $c = (aq)q' = a(qq')$ . A  $qq'$  természetes szám, ezért valóban  $a \mid c$ .

# OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

## AZ OSZTHATÓSÁG TULAJDONSÁGAI

- ▶ *Ha  $a \mid b$  és  $a \mid c$ , akkor  $a \mid b + c$ , azaz ha egy szám külön-külön osztója két számnak, akkor az összegüknek is osztója. ( Ez a különbségre is érvényes)*

### Bizonyítás:

Ha  $a \mid b$ , akkor  $b = aq$  ( $q \in \mathbb{N}$ ) és ha  $a \mid c$ , akkor  $c = aq'$  ( $q' \in \mathbb{N}$ ).

Összegük:  $b + c = aq + aq' = a(q + q')$ . Mivel  $q + q' \in \mathbb{N}$ , ezért  $a \mid b + c$ .

Például:  $13 \mid 143$  és  $13 \mid 403$ , akkor  $13 \mid 143 + 403$ , azaz  $13 \mid 546$ .

# OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

## AZ OSZTHATÓSÁG TULAJDONSÁGAI

- ▶ *Ha  $a \mid b$ , akkor  $a \mid bd$ , azaz ha egy  $a$  szám egy  $b$  számnak osztója, akkor  $a$   $b$  szám többszörösének is osztója.*

*Ez általánosabban: ha  $a \mid b$  és  $c \mid d$ , akkor  $ac \mid bd$ .*

### Bizonyítás:

Ugyanis, ha  $a \mid b$ , akkor  $b = aq$  ( $q \in \mathbb{N}$ ), és ha  $c \mid d$ , akkor  $d = cq'$  ( $q' \in \mathbb{N}$ ).

Szorzatuk  $bd = aqcq' = acqq'$ . Mivel  $qq'$  természetes szám, valóban  $ac \mid bd$ .

Pl.  $17 \mid 51$  és  $11 \mid 99$ -ből következik  $17 \cdot 11 \mid 51 \cdot 99$ , azaz  $187 \mid 5049$ .

# OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

## AZ OSZTHATÓSÁG TULAJDONSÁGAI

- ▶ *Ha  $a$  osztója  $b$ -nek, akkor  $a$  összes osztója is osztója  $b$ -nek.*

Pl.  $12 \mid 36$ , akkor  $2 \mid 36$ ,  $3 \mid 36$ ,  $4 \mid 36$ ,  $6 \mid 36$ .

- ▶ *Ha  $a \mid c$  és  $b \mid c$  valamint  $a$  és  $b$  relatív prímszámok, akkor  $a \cdot b \mid c$ .*

Ebből ered a 6-tal való oszthatóság, miszerint egy szám akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal.

- ▶ *Ha  $a \mid b$  és  $b \mid a$ , akkor  $a = b$ .*



# OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

- Egy szám osztható **2-vel**, ha utolsó jegye osztható kettővel, azaz 0, 2, 4, 6, vagy 8-ra végződik. A kettővel osztható természetes számokat páros( $2n$ ), a többi páratlan( $2n+1$ ) számoknak nevezzük.
- Egy szám osztható **5-tel**, ha utolsó jegye osztható öttel, azaz ha 0-ra vagy 5-re végződik.
- Egy szám osztható **10-zel**, ha 0-ra végződik.

# OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

- Egy szám osztható **4-gyel**, ha utolsó két számjegyével alkotott szám osztható 4-gyel.
- Egy szám osztható **25-tel**, ha utolsó két számjegyével alkotott szám osztható 25-tel, azaz ha 00-ra, 25-re, 50-re, vagy 75-re végződik.
- Egy szám osztható **8-cal**, ha utolsó három számjegyével alkotott szám osztható 8-cal.

# OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

- Egy szám osztható **3-mal**, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.

Például  $3 \mid 861$ -nek, mert  $8+6+1=15$ , ami osztható 3-mal.  
Valóban  $861=3 \cdot 287$ .

- Egy szám osztható **9-cel**, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel.

Például:  $9 \mid 1674$ , hiszen  $1+6+7+4=18$ , ami osztható 9-cel.  
Valóban  $1674=9 \cdot 186$ .

## Feladatok:

1. *Igazoljuk, hogy*  
a)  $6 \mid 264$     b)  $12 \mid 156$     c)  $15 \mid 990$
2. *Melyik az a legkisebb háromjegyű szám, amelyik osztható 12-vel?*
3. *Bizonyítsuk be, hogy három egymást követő természetes szám összege osztható 3-mal, szorzata pedig osztható 6-tal!*
4. *Igazoljuk, hogy ha  $n$  páratlan szám, akkor  $n^2 - 1$  osztható 8-cal.*

## *Házi feladat:*

### *1. Melyik az a*

- a) legnagyobb kétjegyű szám, amelyik osztható 3-mal, de 9-cel nem?*
- b) legnagyobb háromjegyű szám, amelyik osztható 6-tal?*
- c) legkisebb háromjegyű szám, amelyik osztható 9-cel?*
- d) legkisebb háromjegyű szám, amelyik osztható 9-cel és 25-tel is?*

*Köszönöm a figyelmet!*