Matematika

a középiskolák első osztálya számára

SZERKESZTÉSEK: IZOMETRIÁK ALKALMAZÁSA

FELADATOK

1. Legyen P az ABC szabályos háromszög belső pontja úgy, hogy APB∠=113° és BPC∠=123°. Számítsd ki annak a háromszögnek a belső szögeit, amelynek oldalai egybevágók a PA, PB, PC szakaszokkal.

APC∠=360°-(113°+123°)=124°

$R_{A,60°}(P) = P'$ $\quad APP'\Delta$ *egyenlő oldalú*

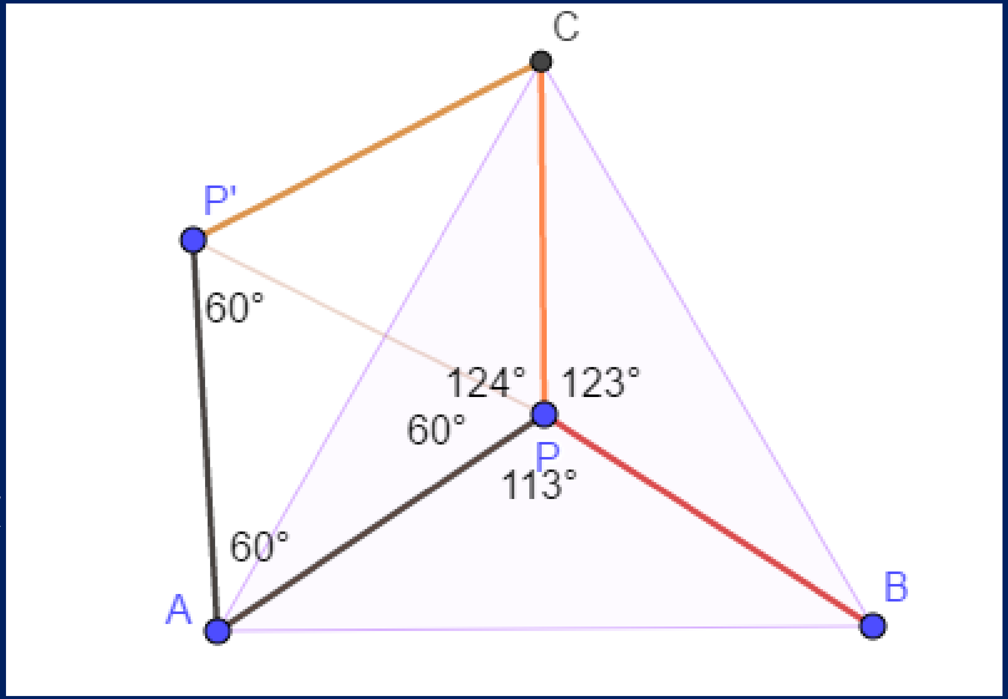
$APB\Delta \cong AP'C\Delta$ $\quad (OSzO$ *tétel alapján,*

$AP \cong AP',\ AB \cong AC,$

$BAP\measuredangle \cong 60° - CAP\measuredangle \cong CAP'\measuredangle)$

$\Rightarrow PB \cong P'C \quad \Rightarrow R_{A,60°}(PB) = P'C$

$PP'C$ *háromszög oldalai egybevágóak* PA, PB, PC *szakaszokkal*



$CP'P\measuredangle = 53°$ $\quad CPP'\measuredangle = 64°$ $\quad P'CP\measuredangle = 63°$

FELADATOK

2. Adottak a P, Q, R nemkollineáris pontok. Szerkeszd meg az ABC háromszöget úgy, hogy a P, Q, R pontok a háromszög BC, CA, AB oldalaira szerkesztett négyzetek középpontjai legyenek.

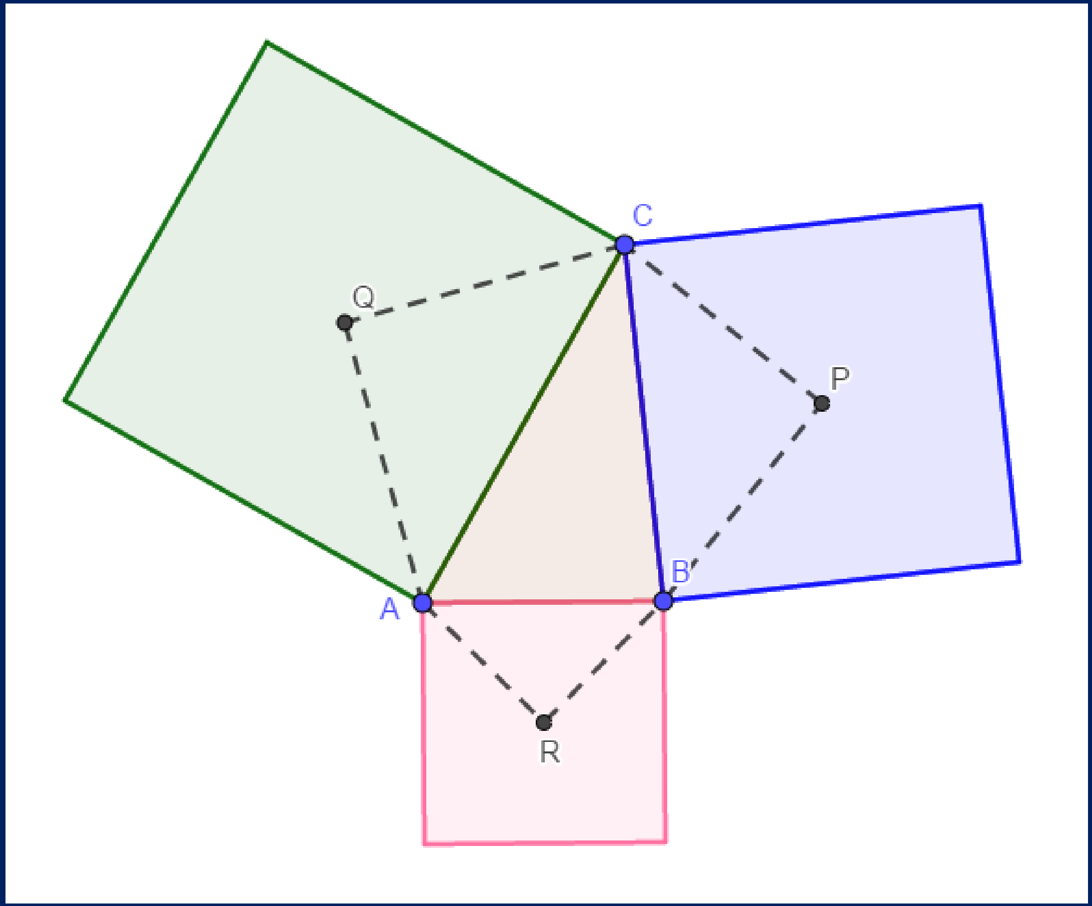
$R_{R,90°}(B)=A$

$R_{Q,90°}(A)=C$

$R_{P,90°}(C)=B$

$R_{P,90°} \circ R_{Q,90°} \circ R_{R,90°}(B)=B$

$R_{B,-90°}(X)=X'''$



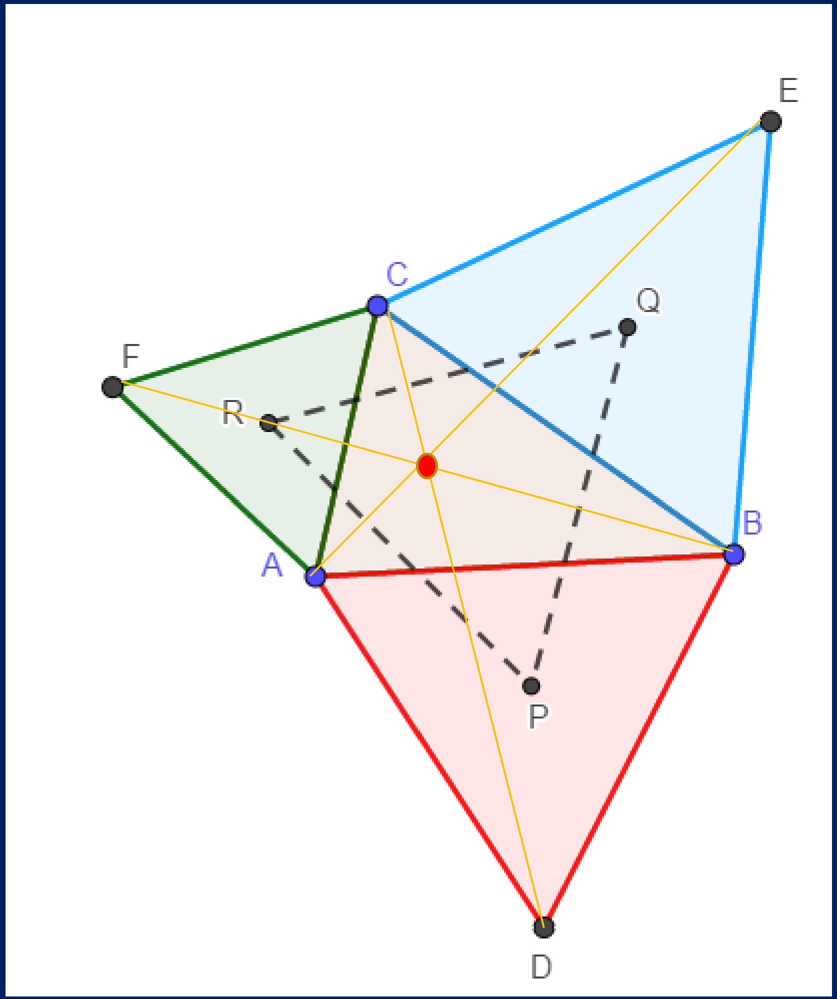
FELADATOK

Fermat-pont AE∩BF∩CD

3. Legyenek a P, Q, R pontok az ABC általános háromszög oldalaira kívülről szerkesztett szabályos háromszögek középpontjai. Igazold, hogy a PQR háromszög is szabályos (*Napóleon háromszöge*).

Napóleon mindig szívesen vitatkozott tudósokkal, s egy alkalommal heves vitába szállt a kor két nagy matematikusával, Lagrange-zsal és Laplace-szal, akik végül így intették le a nagy generálist: „***Tábornok úr, geometriai előadást csak a legvégső esetben kérünk öntől!***”

Az izogonális pont, Fermat-pont vagy Torricelli-pont a geometriában az a pont, amit egy háromszög csúcsaival összekötve az összekötő szakaszok együttes hossza minimális. Fermat fedezte fel, aki feladványul adta Evangelista Torricellinek a pont megszerkesztését



FERMAT-TORRICELLI PONT

$FAB\Delta \cong CAD\Delta$ $(OSzO\ tétel, FA \cong CA, AB \cong AD, FAB\measuredangle \cong CAD\measuredangle = \alpha + 60°)$

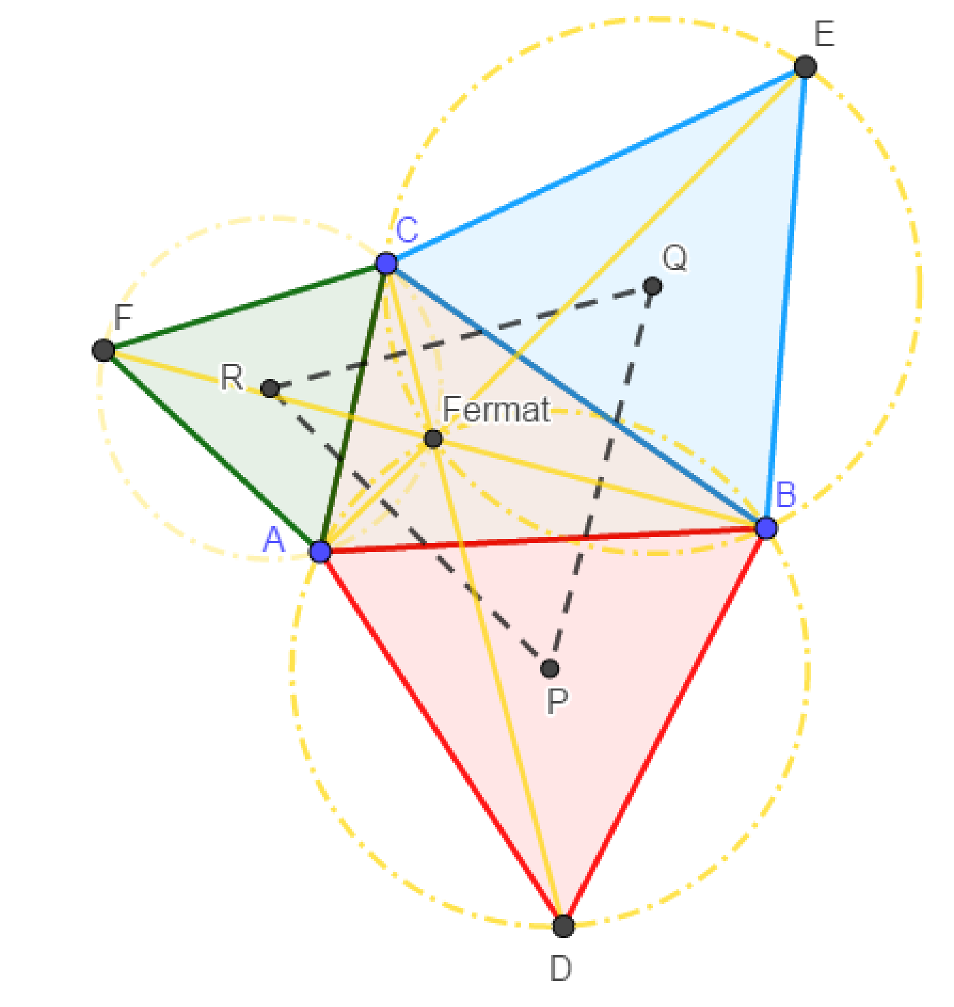
$R_{A,60°}(FB) = CD,\qquad FB \cong CD,\qquad (FB, CD)\measuredangle = 60°$

$FCB\Delta \cong CAE\Delta$ $(OSzO\ tétel, FC \cong CA, CB \cong CE, FCB\measuredangle \cong ACE\measuredangle = \gamma + 60°)$

$R_{C,60°}(FB) = AE,\qquad FB \cong AE,\qquad (FB, AE)\measuredangle = 60°$

$\mathrm{D}CB\Delta \cong BAE\Delta$ $(OSzO\ tétel, DB \cong AB, CB \cong BE, DBC\measuredangle \cong ABE\measuredangle = \beta + 60°)$

$R_{B,60°}(CD) = AE,\qquad CD \cong AE,\qquad (CD, AE)\measuredangle = 60°$



Az ABD, BCE és CAF háromszögek körülírt köreinek középpontjai P, Q, R, közös metszéspontjuk a Fermat-pont, amellyel húrnégyszögeket alkotnak.
RP, PQ, RQ a körök közös húrjainak felezőmerőlegesei.

NAPÓLEON HÁROMSZÖGE

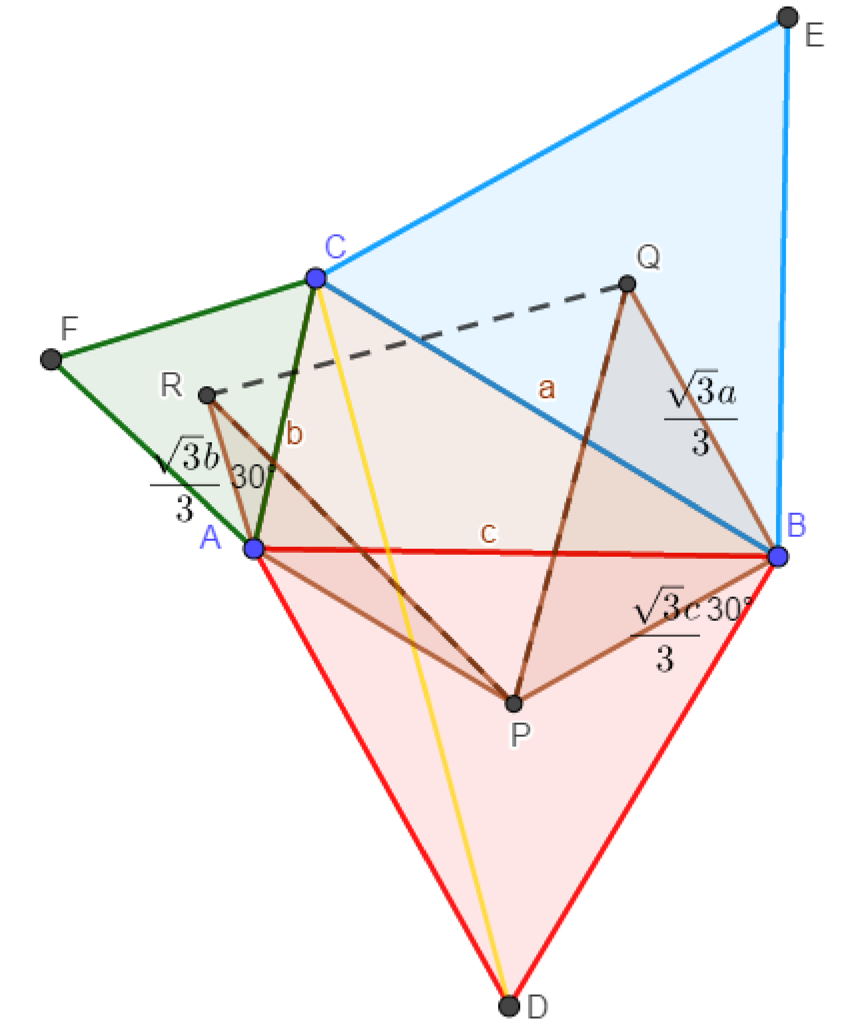
$ARP\Delta$ *elforgatjuk A csúcs körül* -30 *fokkal és* $\sqrt{3}-$ *szorosára növeljük, akkor* $ACD\Delta$ *kapjuk.*

$BQP\Delta$ *elforgatjuk B csúcs körül 30 fokkal és* $\sqrt{3}-$ *szorosára növeljük, akkor* $BCD\Delta$ *kapjuk.*

$\sqrt{3}RP = CD = \sqrt{3}PQ$ $\qquad RP \cong PQ$

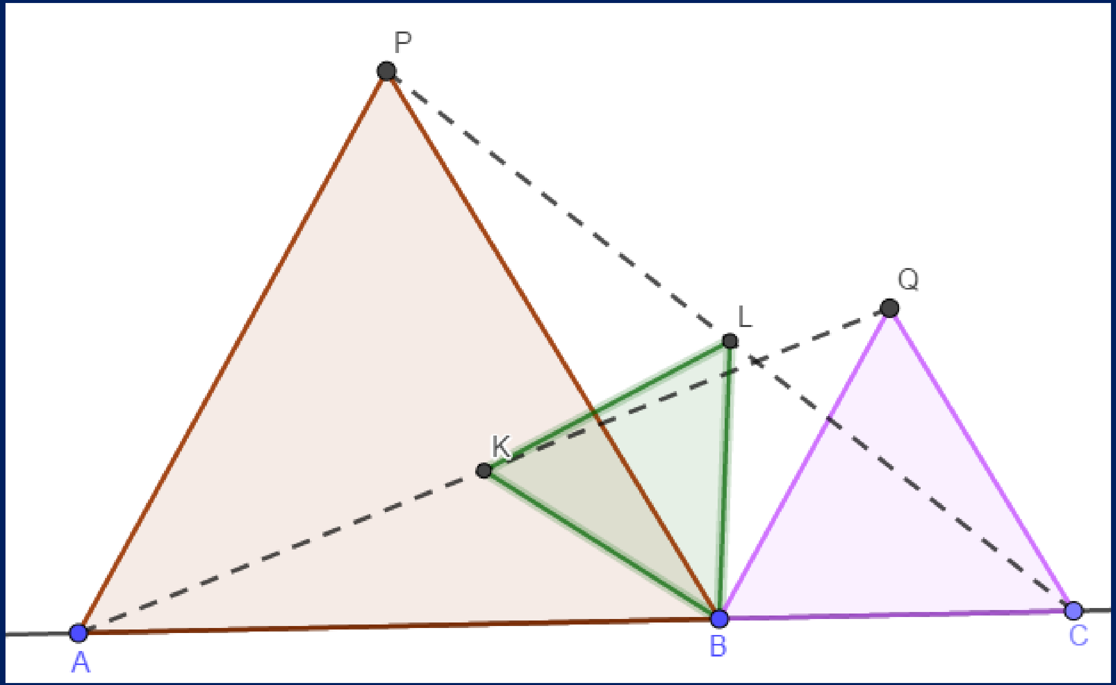
Hasonlóan bizonyítjuk, hogy $\quad RQ \cong PQ$

PQR háromszög egyenlő oldalú



FELADATOK

4. Legyenek az ABP és BCQ azonos körüljárású szabályos háromszögek, miközben $\mathscr{B}$(A, B, C). Ha a K és L pontok az AQ és PC szakaszok középpontjai, igazold, hogy a BLK háromszög is szabályos.



ABQ∆≅PBC∆ mert AB≅PB, BQ≅BC és ABQ∠≅PBC∠=120°

$$R_{B-,60°}(AQ) = PC$$

Izometriával a szakasz felezőpontja a megfelelő egybevágó szakasz felezőpontjára képződik le.

$$R_{B,-60°}(K) = L$$

BKL ∆ szabályos, egyenlő oldalú

FELADATOK

5. Szerkeszd meg az ABCD négyzetet, ha adott az A csúcsa és a p egyenes, amelyhez B és D csúcsa illeszkedik

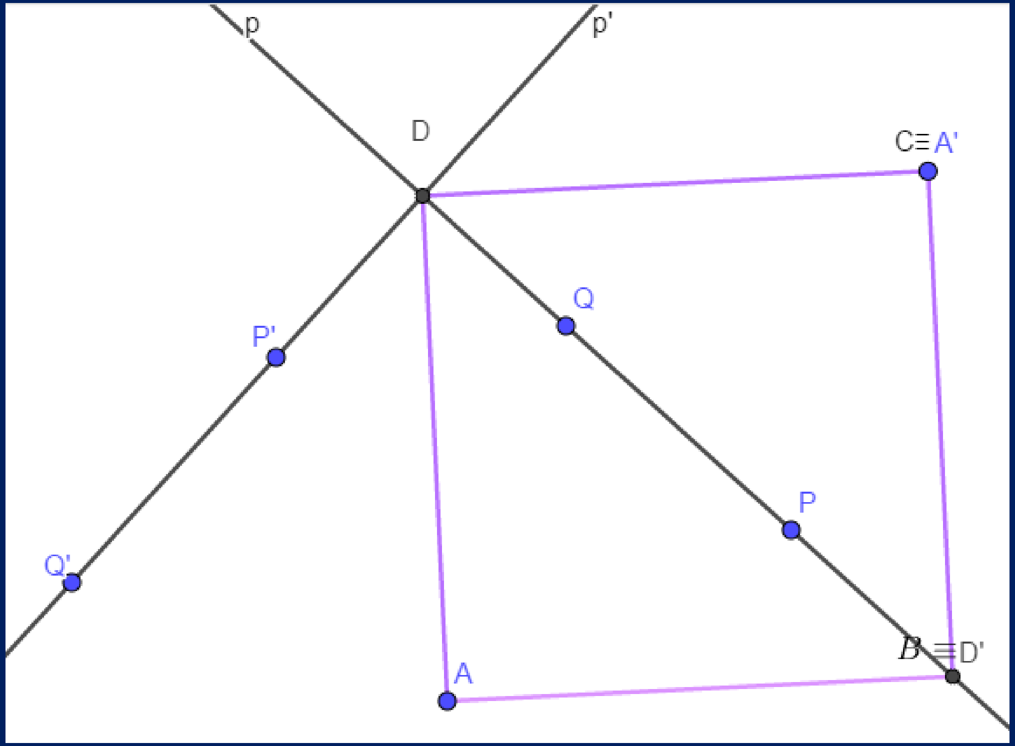
$R_{A,90°}(B) = D$

$R_{A,90°}(p) = p'$ $R_{A,90°}(P) = P'$ $R_{A,90°}(Q) = Q'$

$p \cap p' = D$

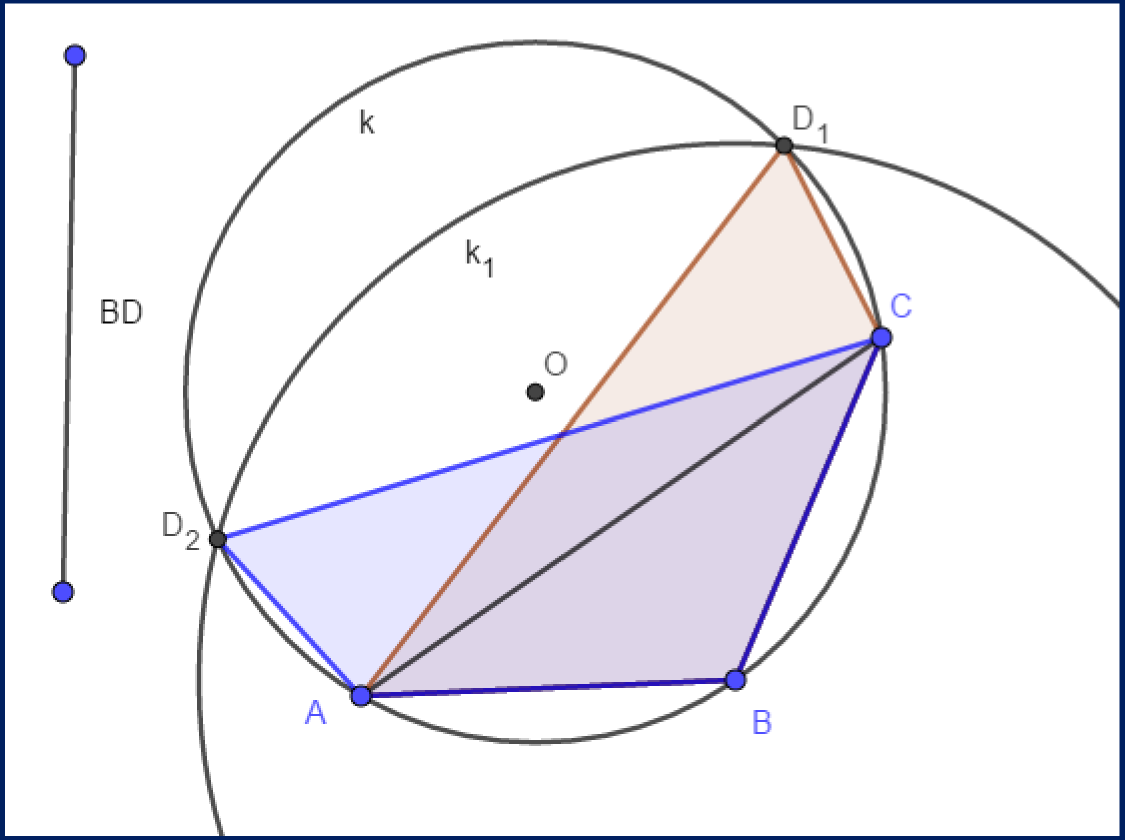
$R_{A-,90°}(D) = D' = B$

$S_p(A) = A' = C$



FELADATOK

6.Szerkeszd meg az ABCD húrnégyszöget, ha adott két oldala, AB és BC, valamint az átlói AC és BD.



1. Megszerkesztjük ABC háromszöget az OOO tétel alapján.
2. Az ABC háromszög körülírt köre legyen k, ezen kell elhelyezni D csúcsot is.
3. Megrajzoljuk B középponttal és BD sugárral a k1 kört.
4. D pont a k körülírt kör és a k1 kör metszete.
5. Diszkusszió: a megoldások száma a k és k1 körök metszéspontjainak a számától függ.

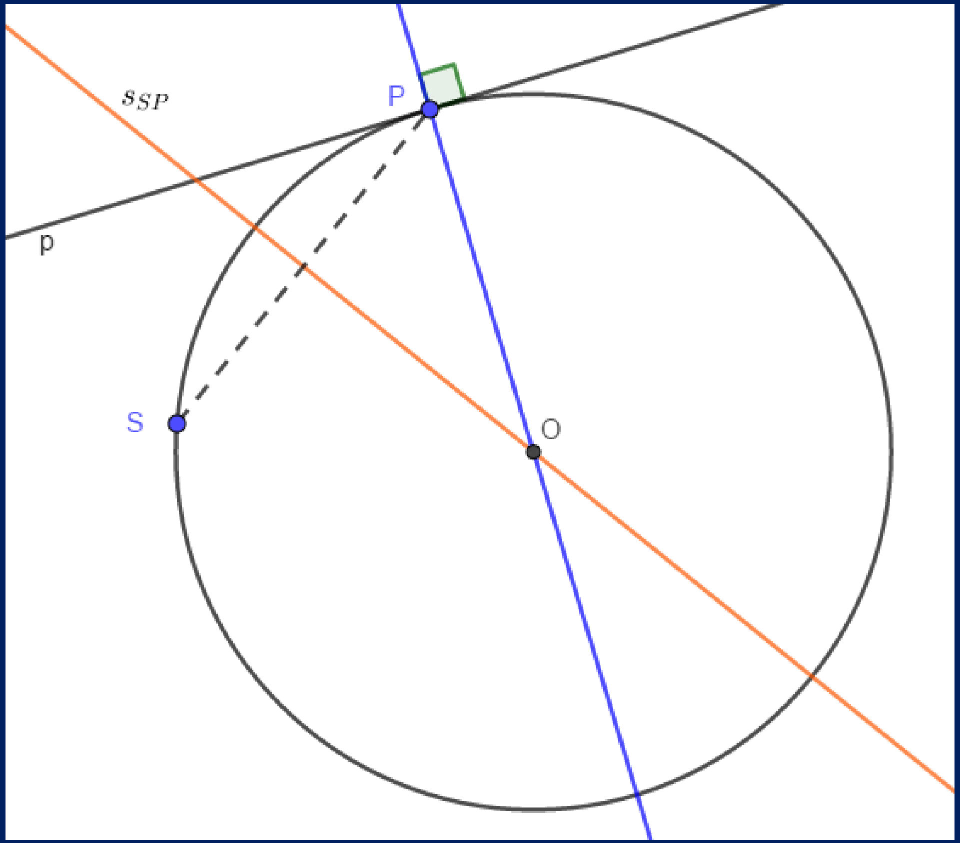
FELADATOK

7. Adott q egyenes, P pont a q egyenesen és S pont, amely nem illeszkedik q egyeneshez. Szerkeszd meg azt a kört, amely tartalmazza S pontot és érinti a q egyenest annak P pontjában.

Ha a kör tartalmazza P és S pontot, akkor a középpontja illeszkedik az SP szakasz szimmetria tengelyéhez.
(piros egyenes)

$s_{PS} \cap OP = O$

Ha a kör érinti a q egyenest annak P pontjában, akkor az OP sugár merőleges az érintőre az érintési pontban.
(kék egyenes)



Köszönöm a megtisztelő figyelmet

Ez a bemutató az izometriákkal való szerkesztéseket mutatta be.