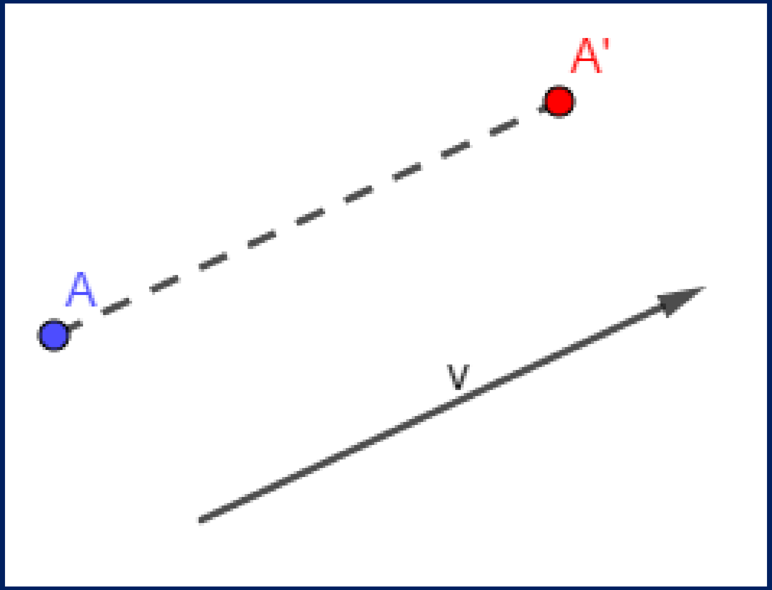
Matematika

a középiskolák első osztálya számára

TRANSZLÁCIÓ (ELTOLÁS)

TRANSZLÁCIÓ

- A transzláció adott $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$ vektorral. $\tau_{\vec{v}}(A) = A'$



A transzlációnak nincs fixpontja.

A transzláció fixegyenesei (invariáns) AA' egyenessel párhuzamosak.

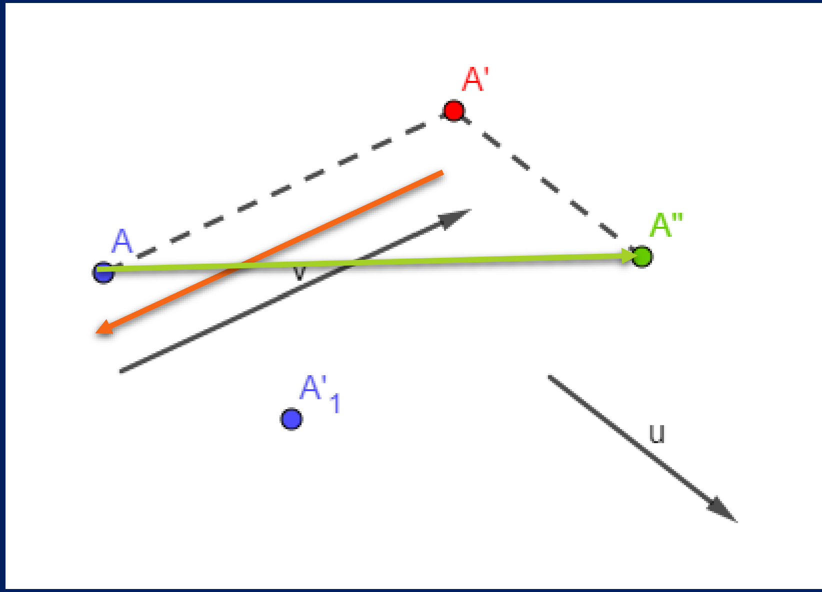
TULAJDONSÁGAI

- ***Tétel***: Legyenek $\tau_{\vec{v}}$ és $\tau_{\vec{u}}$ egy sík transzlációi $\vec{v}$ és $\vec{u}$ vektorokkal. Ekkor érvényes:

$$\tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}}$$

$$\tau_{\vec{v}}^{-1} = \tau_{-\vec{v}}$$

$$\tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u}+\vec{v}}$$



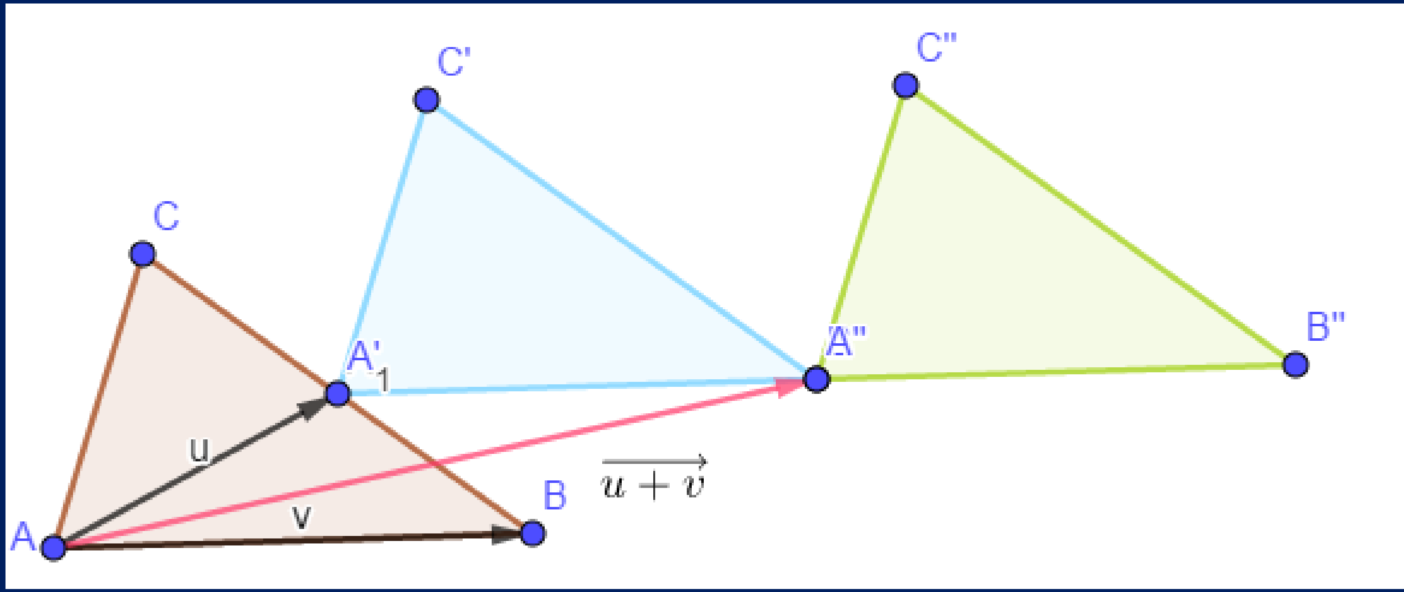
FELADATOK

1. Adott az ABC háromszög, AA_1 a háromszög súlyvonala.

a) Képezzük le az $\vec{u} = \overrightarrow{AA_1}$ vektorral történő eltolással, ez lesz A′B′C′ háromszög.

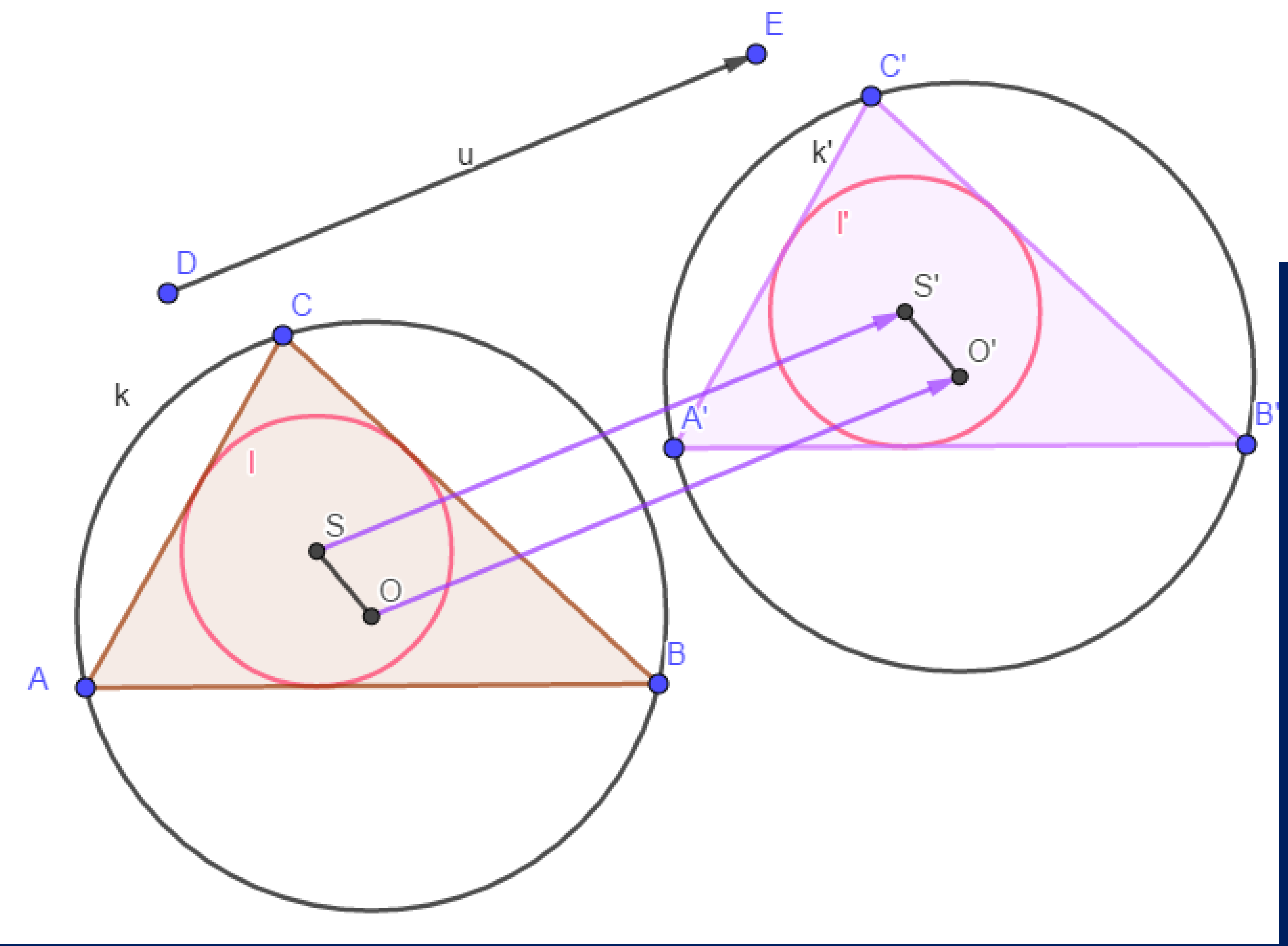
b) Ezután képezzük le A′B′C′ háromszöget $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ vektorral történő eltolással az A″B″C″ háromszögre.

c) Határozzuk meg azt transzlációs vektort, amellyel ABC háromszöget A″B″C″ háromszögre képeztük le.



FELADATOK

2. Adott az ABC háromszög és annak valamely transzlációval kapott képe, az A′B′C′ háromszög. Bizonyítsuk be, hogy az a szakasz, amelynek végpontjai az ABC háromszög beírt, illetve köréírt körének középpontjai, párhuzamos az A′B′C′ háromszög beírt illetve köréírt körének középpontjait összekötő egyenessel.



$\tau_{\vec{u}}(ABC\Delta) = A'B'C'\Delta$

$\tau_{\vec{u}}(k(O,R)) = k'(O',R)$ $\quad \overrightarrow{OO'} = \vec{u}$

$\tau_{\vec{u}}(l(S,r)) = l'(S',r)$ $\quad \overrightarrow{SS'} = \vec{u}$

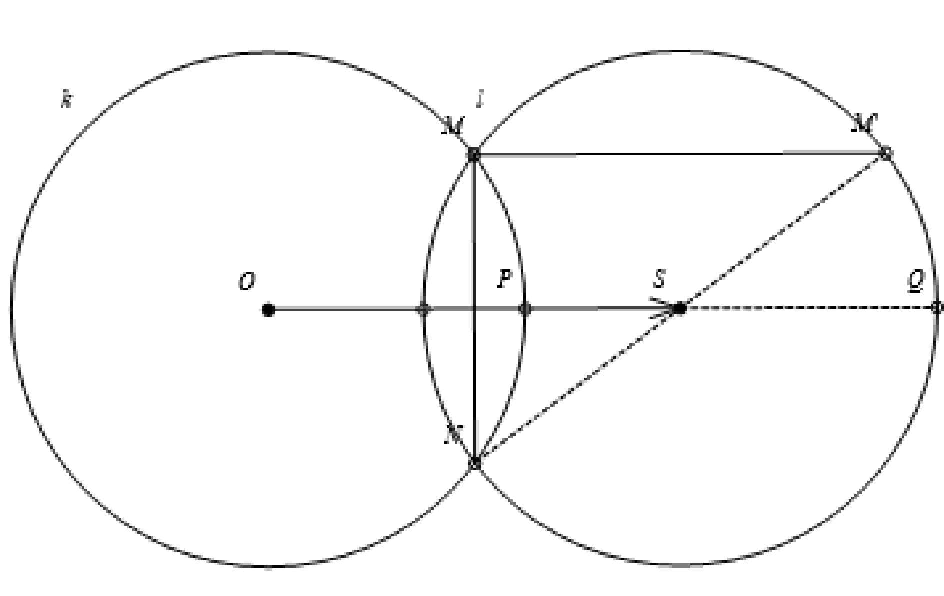
$\overrightarrow{SS'} = \overrightarrow{OO'} \Rightarrow$ OO′S′S paralelogramma

A paralelogramma szemköztes oldalai párhuzamosak, tehát SO||S′O′

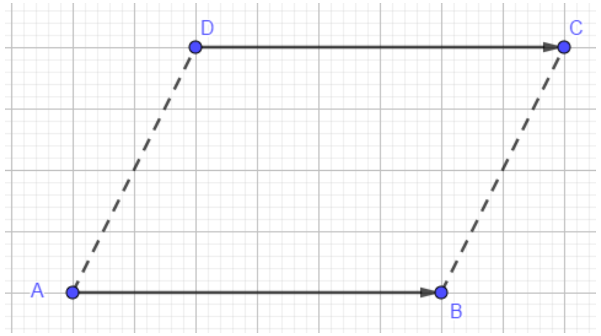
FELADATOK

3. Legyenek a *k* és *l* egybevágó *r* sugarú körök közös metszéspontjai az M és N pontok. Ha P és Q a körök középpontjait összekötő egyenes körökkel való metszéspontjai, amelyekre P és Q pontok az MN egyenes ugyanazon oldalán vannak, igazold, hogy $MN^2 + PQ^2 = 4r^2$.

Megoldás: Legyenek az O és S pontok az adott körök középpontjai és $\overrightarrow{OS} = \vec{v}$.
Ekkor a $\tau_{\vec{v}}$ transzláció a k kört leképezi az l körre és az M pontot egy M′ pontra.
Mivel az M pont a k körhöz tartozik, a képe, M′ pont, az l körön lesz.
Ezért $\tau_{\vec{v}}(P) = Q$.
Az MM′ és OS egyenesek párhuzamosak és MM′≅OS≅PQ.
Mivel az MN egyenes merőleges az OS egyenesre, ezért merőleges az MM′ egyenesre is.
Tehát az NMM′ szög derékszög, vagyis az NM′ szakasz az l kör átmérője.
Alkalmazva a Pitagorasz-tételt, levezethető:
$MN^2 + PQ^2 = MN^2 + MM'^2 = NM'^2 = 4r^2$



FELADATOK



4. Legyenek az A és B pontok, valamint a *k* és *l* körök egy síkban.

Szerkeszd meg C∈ *k* és D∈*l* pontokat úgy, hogy az ABCD négyszög paralelogramma legyen.

ABCD paralelogramma $\leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\tau_{\overrightarrow{AB}}(D) = C$

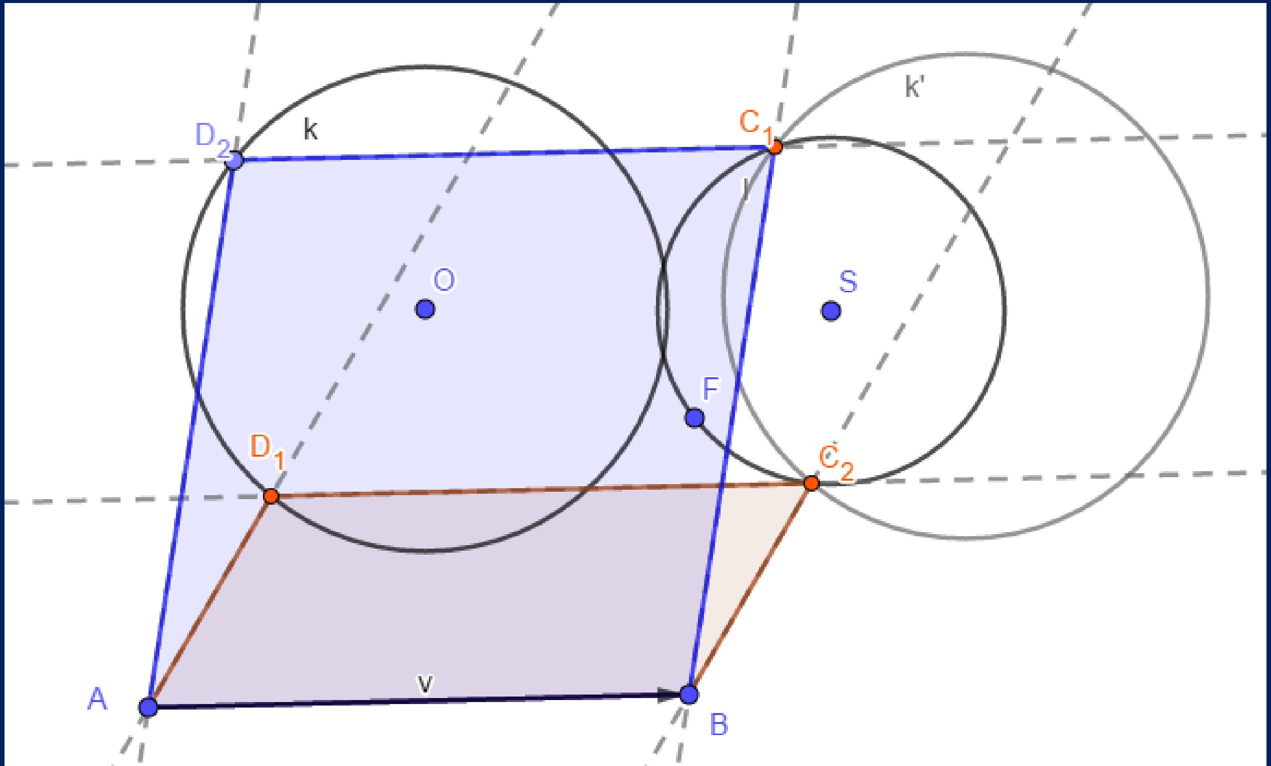
$\tau_{\overrightarrow{AB}}(k) = k'$

$k' \cap l = \{C_1, C_2\}$

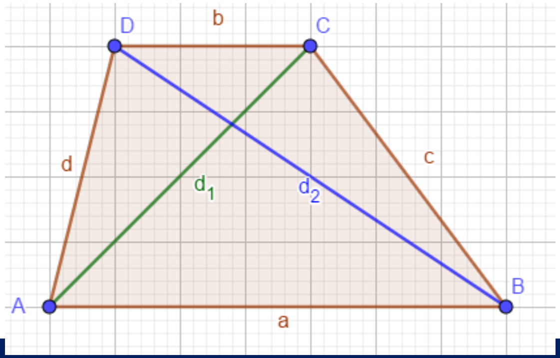
$\tau_{\overrightarrow{BA}}(C_1) = D_1$

$\tau_{\overrightarrow{BA}}(C_2) = D_2$

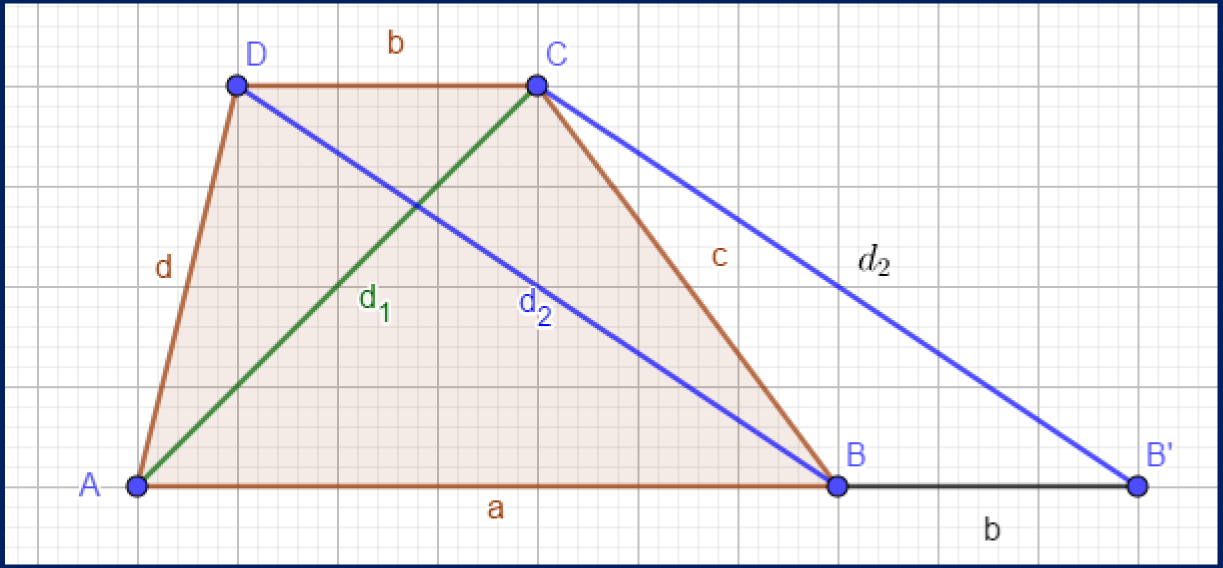
A megoldások számát a *k'* és *l* körök metszéspontjainak száma határozza meg



FELADATOK



5.Szerkesszük meg azt a trapézt, amelynek adottak az alapjai *a* és *b*, és az átlói *d1* és *d2*.



$\tau_{\overrightarrow{DC}}(DB) = CB'$

$\Rightarrow$*BB'CD paralelogramma*

$\Rightarrow$ *AB'=AB+BB'=AB+DC=a+b*

$\Rightarrow$*AB'C háromszög megszerkeszthető OOO tétellel (a+b, d1,d2)*

$\tau_{\overrightarrow{B'B}}(B') = B$
$\tau_{\overrightarrow{B'B}}(C) = D$

A feladatnak akkor van megoldása, ha érvényesül a háromszögegyenlőtlenség: bármely két oldal összege nagyobb a harmadik oldaltól, *d1+d2>a+b*

FELADATOK

6. Adott a p egyenes, valamint a k és l körök egy síkban. Szerkeszd meg a p egyenessel párhuzamos egyenest, amely egybevágó húrokat metsz ki az adott körökből.

Megoldás: Legyenek C és E pontok az O (k kör középpontka) és S (l kör középpontja) pontok merőleges vetületei a p egyenesre.

$$\tau_{\overrightarrow{CE}}(k) = k'$$

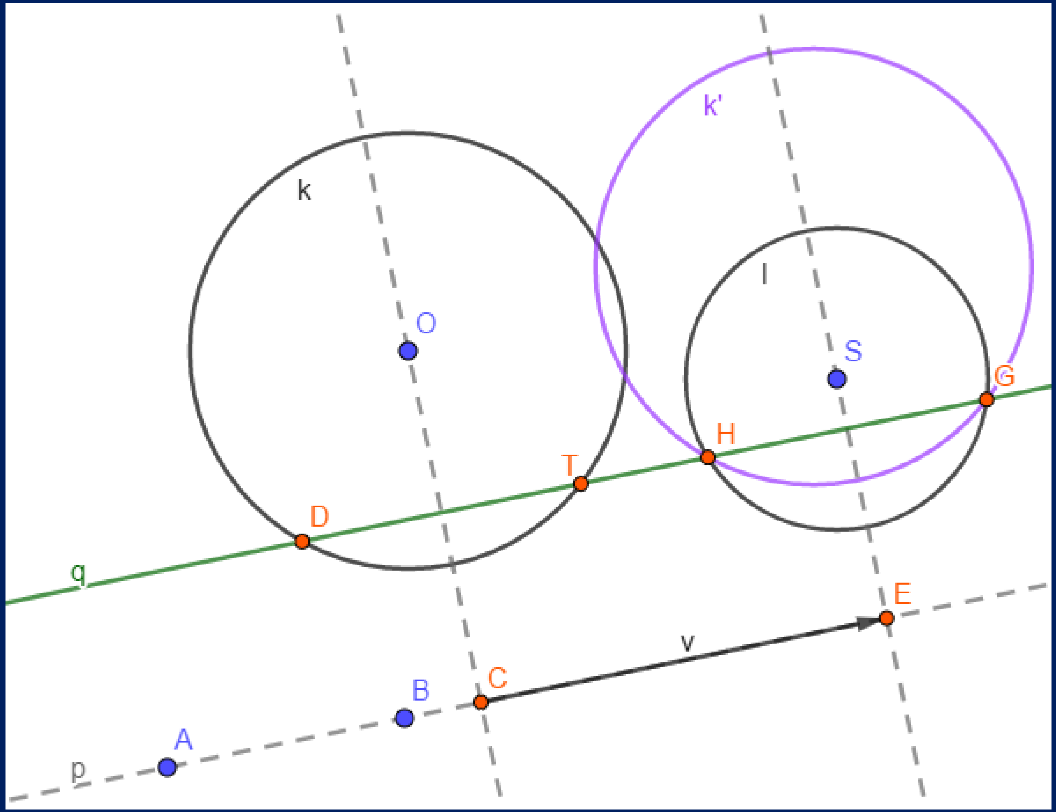
$$k' \cap l = \{H, G\}$$

$$HG = q, \qquad q \cap k = \{D, T\}$$

$$\tau_{\overrightarrow{EC}}(HG) = DT$$

[HG]≅[DT]

A megoldások számát a k' és l körök metszéspontjainak száma határozza meg



FELADATOK

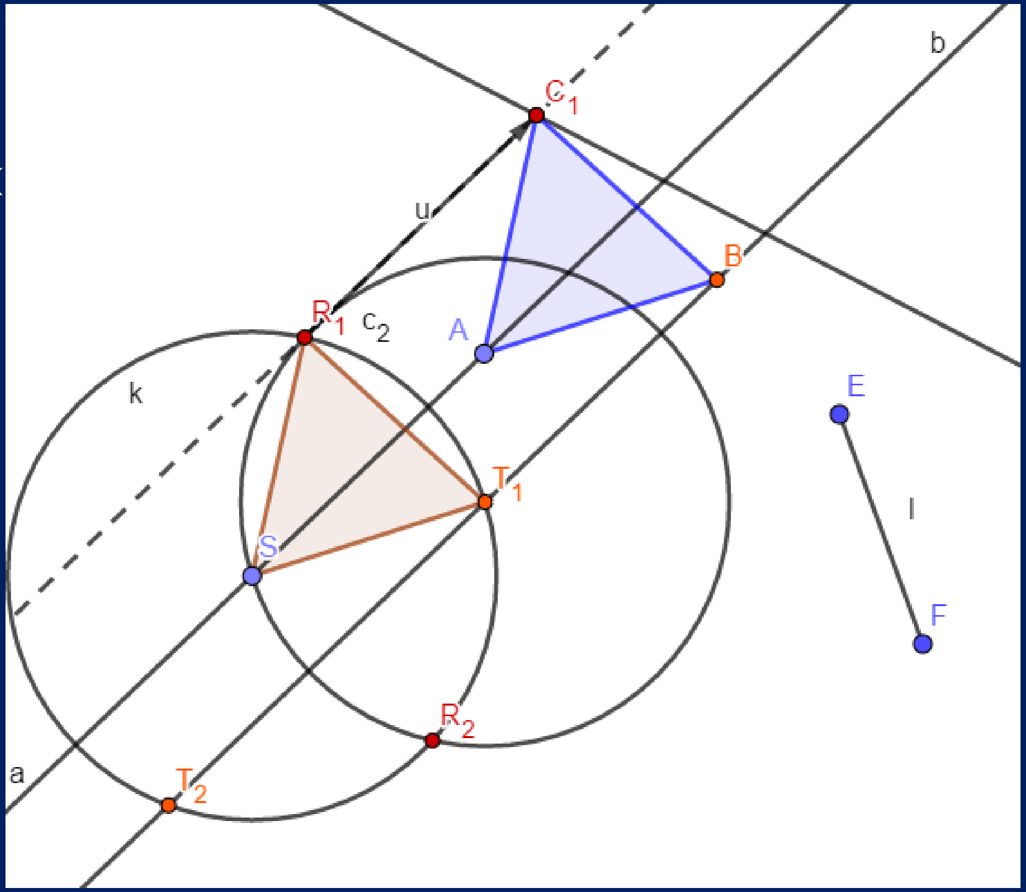
7. Legyenek az *a* és *b* egyenesek párhuzamosak, *c* egyenes pedig metszi őket, és legyen adott *l* szakasz ugyanabban a síkban. Szerkeszd meg az ABC szabályos háromszöget, amelynek csúcsai rendre az adott egyenesekhez illeszkednek és oldalai egybevágók az adott *l* szakasszal.

$A \in a, B \in b, C \in c, ABC\Delta \; egyenlő \; oldalú, \qquad AB \cong BC \cong AC = l$

1. Megszerkesztjük RST egyenlő oldalú háromszöget, amelynek oldalai ***l*** hosszúságúak, $S \in a$, $T \in b$
2. Az R ponton keresztül párhuzamos egyenest húzunk *a* és *b* egyenesekkel, amely a c egyenest C1 pontban metszi
3. Az RC1 vektorral elvégezzük az RST háromszög transzlációját

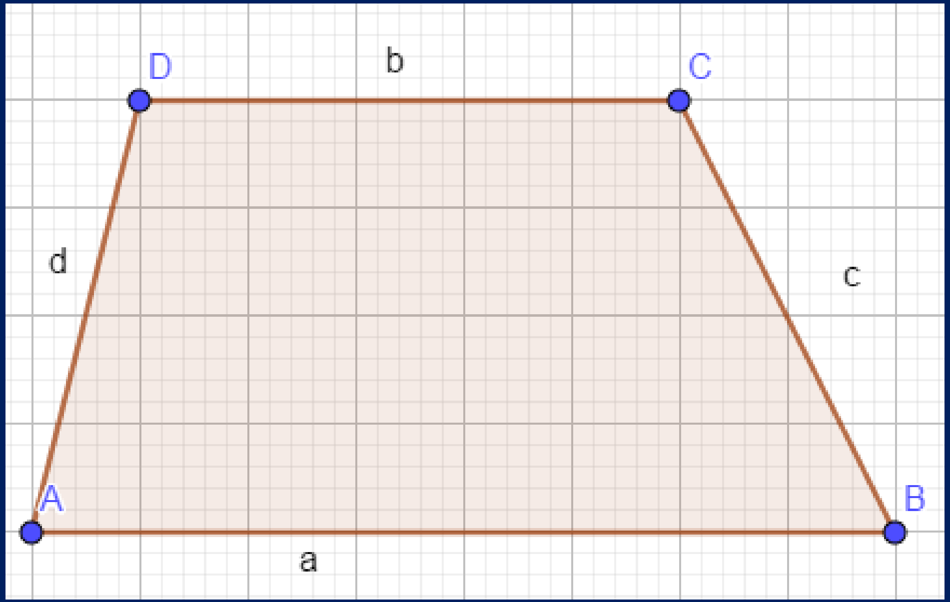
$$\tau_{\overrightarrow{RC1}}(ST) = AB$$

Mikor van megoldása?



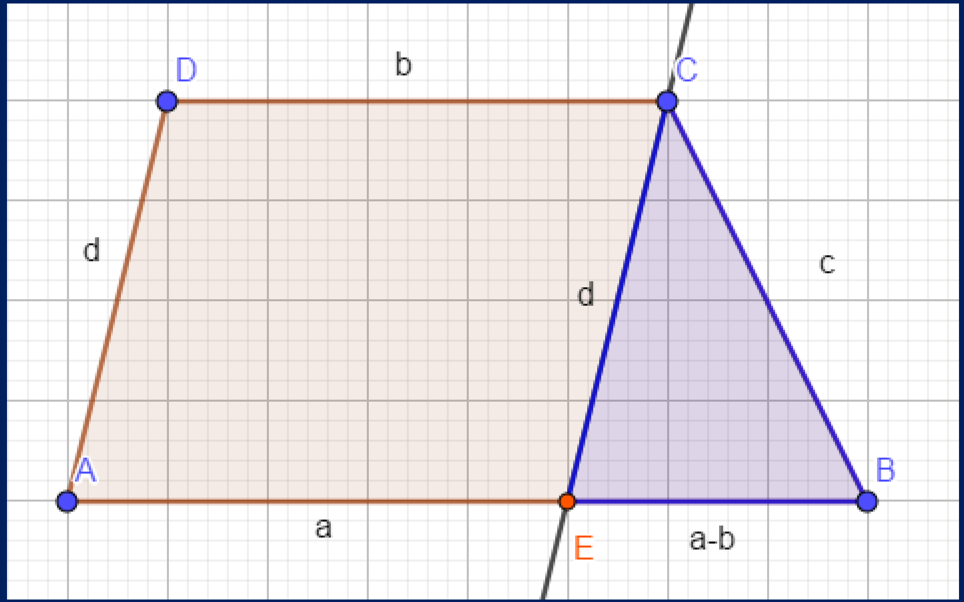
FELADATOK

8.Szerkesszük meg azt a trapézt, amelynek adottak az oldalai



$CD \| \mathrm{EB}$ és $\mathrm{CD} \cong b$

$\tau_{\overrightarrow{CD}}(E) = A$



$CEB\Delta$ *megszerkeszthető OOO tétel szerint* $d, c, a - b$ *szakaszokkal*

Köszönöm a megtisztelő figyelmet

Ez a bemutató a transzlációval foglalkozott