Matematika

a középiskolák első osztálya számára

VEKTOROK, MŰVELETEK VEKTOROKKAL

VEKTOR

- A vektor geometriai modellje az irányított szakasz.
- A kezdőpont
- B végpont
- Ezek a kötött vektorok, jele $\overrightarrow{AB}$

VEKTOR

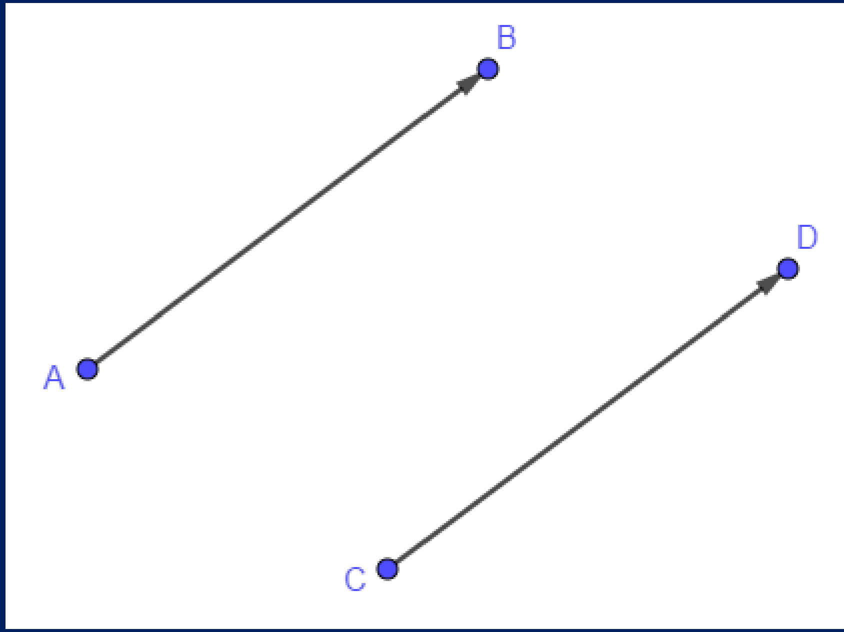
- Jellemzői:

1. Irány: (állás) AB egyenes helyzete
2. Irányítás: kezdő- és végpont sorrendje
3. Intenzitás: AB szakasz hossza

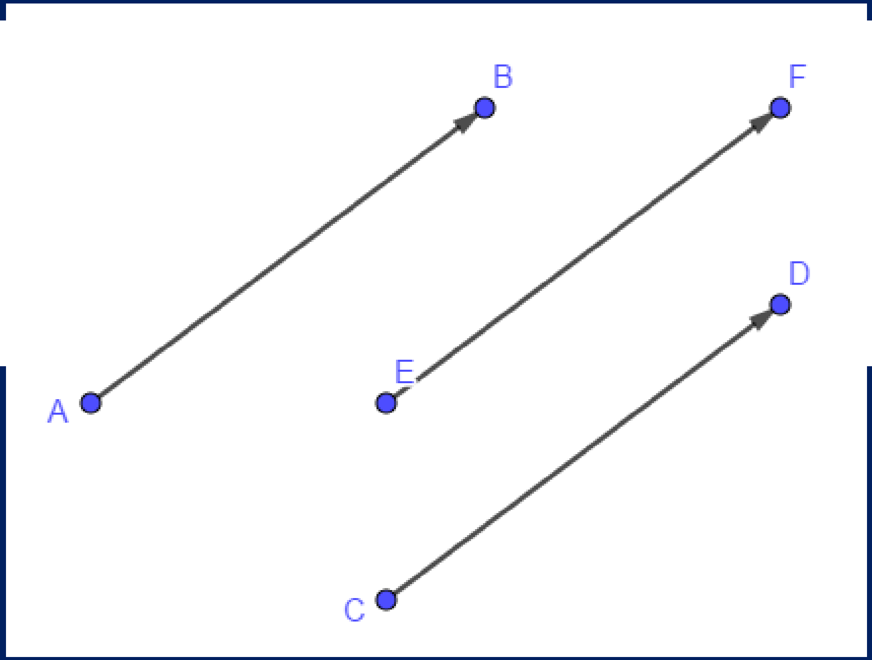
VEKTOROK EGYENLŐSÉGE

- Két vektor egyenlő, ha minden jellemzőjük egyenlő, vagyis irányuk (állás), irányításuk (kezdő és végpont sorrendje), intenzitásuk (szakaszok hossza).

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} AB \| CD \\ A \to B \text{ és } C \to D \\ [AB] \cong [CD] \end{cases}$$



VEKTOROK EGYENLŐSÉGE



- A vektorok egyenlősége ekvivalencia reláció
- Reflexív: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \| AB \\ A \to B \\ [AB] \cong [AB] \end{cases}$
- Szimmetrikus: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \| CD \\ A \to B \text{ és } C \to D \\ [AB] \cong [CD] \end{cases} \Rightarrow \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} CD \| AB \\ C \to D \text{ és} A \to B \\ [CD] \cong [AB] \end{cases}$
- Tranzitív : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \wedge \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \| CD \ \wedge CD \| EF \\ A \to B \,, C \to D, E \to F \\ [AB] \cong [CD] \wedge [CD] \cong [EF] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \| EF \\ A \to B \text{ és } E \to F \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} \\ [AB] \cong [EF] \end{cases}$

VEKTOROK

A vektorok egyenlősége ekvivalencia osztályokra bontja a vektorok halmazát, az ekvivalencia osztályok képviselői a szabad vektorok.

Tétel: Minden A pontra és minden $\vec{v}$ vektorra létezik egyetlen olyan B pont, hogy $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$

Ha a vektor kezdő és végpontja egybeesik, akkor az a nullavektor $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Ha megfordítjuk a vektor kezdő és végpontjának sorrendjét, akkor ellentett vektort kapunk

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

A megegyező irányú vektorok *kollineárisak*.

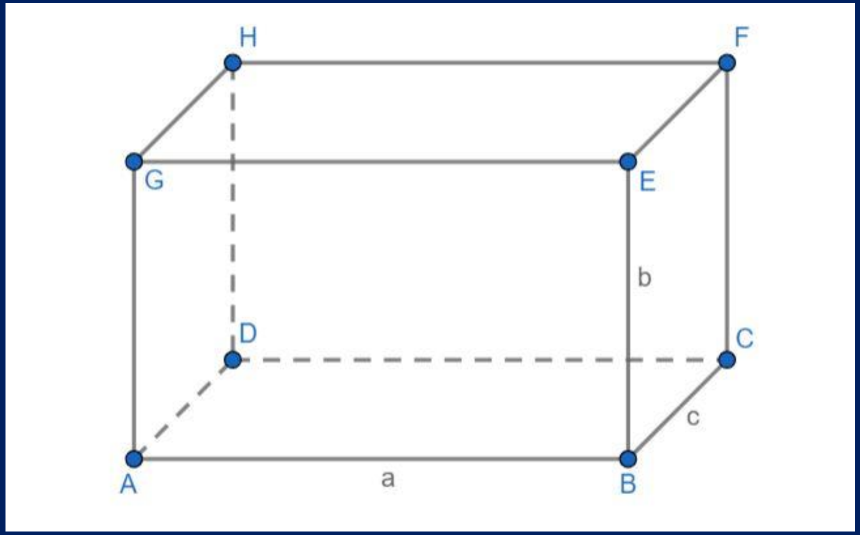
VEKTOROK

- Feladat: a téglatest éleit sorold ekvivalencia osztályokba

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{HF} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH} = \vec{c}$$

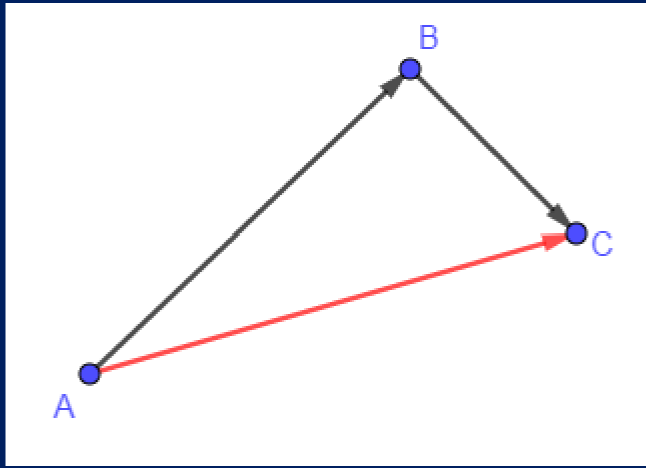
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DH} = \vec{b}$$



VEKTOROK ÖSSZEADÁSA

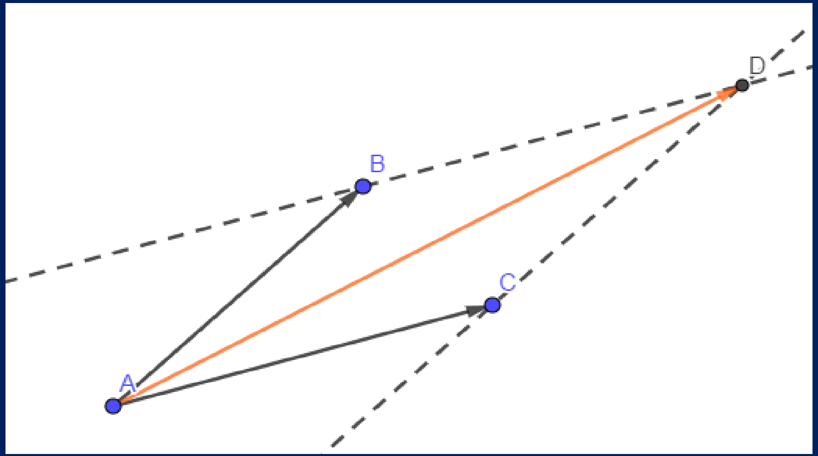
- Vektorok összeadása háromszög-szabállyal:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



- Vektorok összeadása paralelogramma-szabállyal:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$



VEKTOROK ÖSSZEADÁSA

Tétel: (i) Két vektor összege vektor.

- (ii) A vektorok összeadására érvényes az asszociatív törvény.

  $(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{a} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{a})$

- (iii) Létezik $\vec{0}$ vektor, amelyre érvényes, hogy minden $\vec{v}$ vektorra: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.
- (iv) Minden $\vec{v}$ vektorra létezik $-\vec{v}$ vektor úgy, hogy $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.
- (v) Bármely két $\vec{v}$ és $\vec{u}$ vektorra érvényes $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$.(kommutatív)

A vektorok halmaza a vektorok összeadásával mint algebrai struktúra kommutatív csoportot alkot.

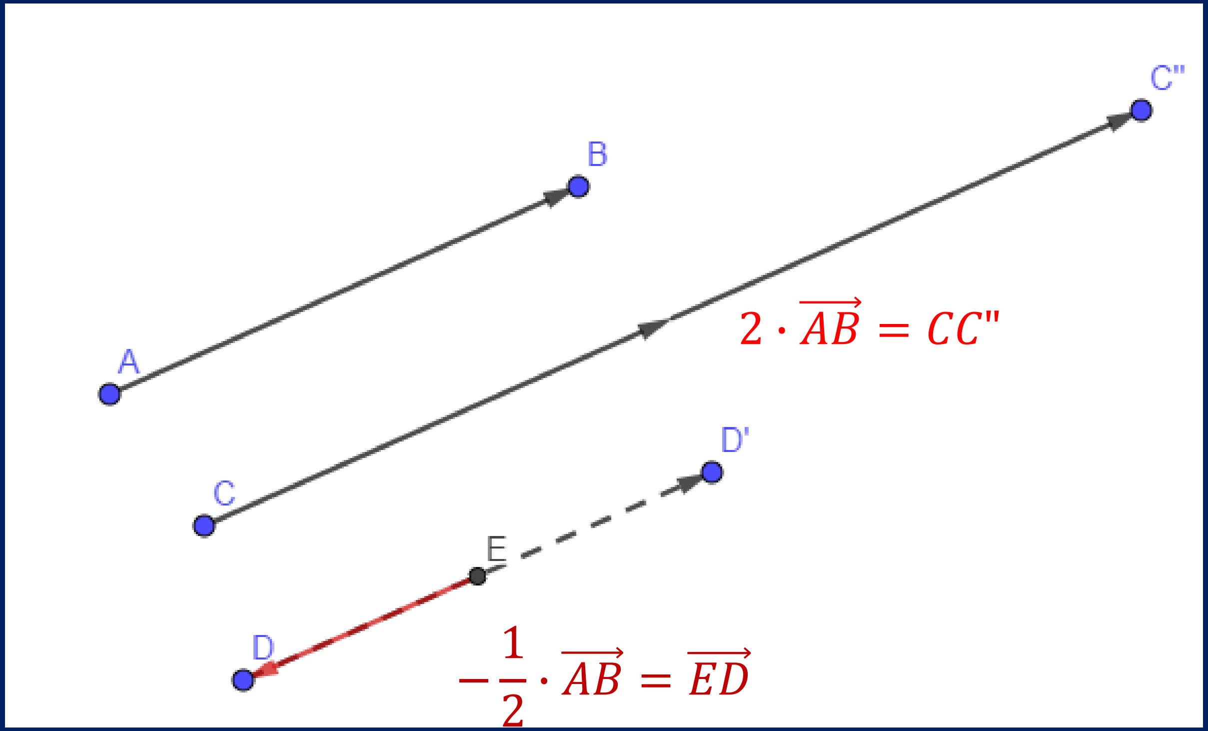
VEKTOR SZORZÁSA SKALÁRRAL

Definíció: (Vektor szorzása számmal) Legyen $\overrightarrow{AB}$ vektor és n természetes szám. Ekkor érvényes:

$$(i)\ 0 \cdot \overline{AB} = \vec{0},$$
$$(ii)\ n \cdot \overline{AB} = (n-1) \cdot \overline{AB} + \overline{AB}$$
$$(iii)\ -n \cdot \overline{AB} = -\left(n \cdot \overline{AB}\right).$$

Tétel: Ha p,q racionális számok és $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ tetszőleges vektorok, akkor:

(i)	$(p+q)\ \overline{AB} = p \cdot \overline{AB} + q \cdot \overline{AB}$
(ii)	$(p\,q) \cdot \overline{AB} = p\,(q \cdot \overline{AB});$
(iii)	$1 \cdot \overline{AB} = \overline{AB};$
(iv)	$p\,(\bar{u} + \bar{v}) = p \cdot \bar{u} + p \cdot \bar{v}.$



VEKTOROK ALKALMAZÁSA

- 1.feladat: Legyen ABCD paralelogramma és M tetszőleges pont a térben. Ha az O pont az adott négyszög átlóinak metszéspontja, igazold, hogy :

$$4 \cdot \overrightarrow{MO} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right)$$

$$\overrightarrow{MO} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AO}\right)$$

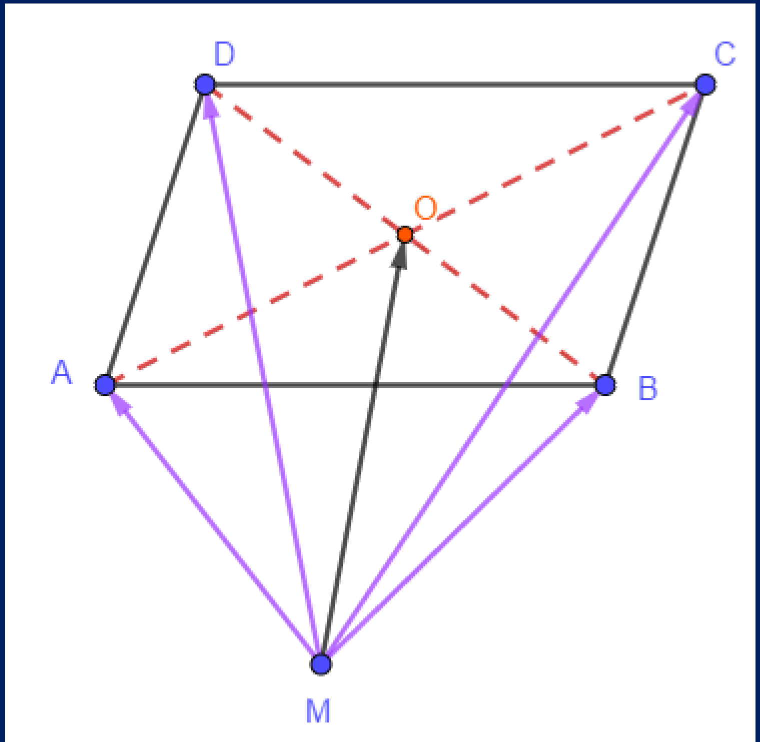
$$\overrightarrow{MO} = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO}\right)$$

$$\overrightarrow{MO} = \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CO}\right)$$

$$\overrightarrow{MO} = \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DO}\right)$$

$\overrightarrow{AO}$ és $\overrightarrow{CO}$ *ellentett vektorok*

$\overrightarrow{BO}$ és $\overrightarrow{DO}$ *ellentett vektorok*



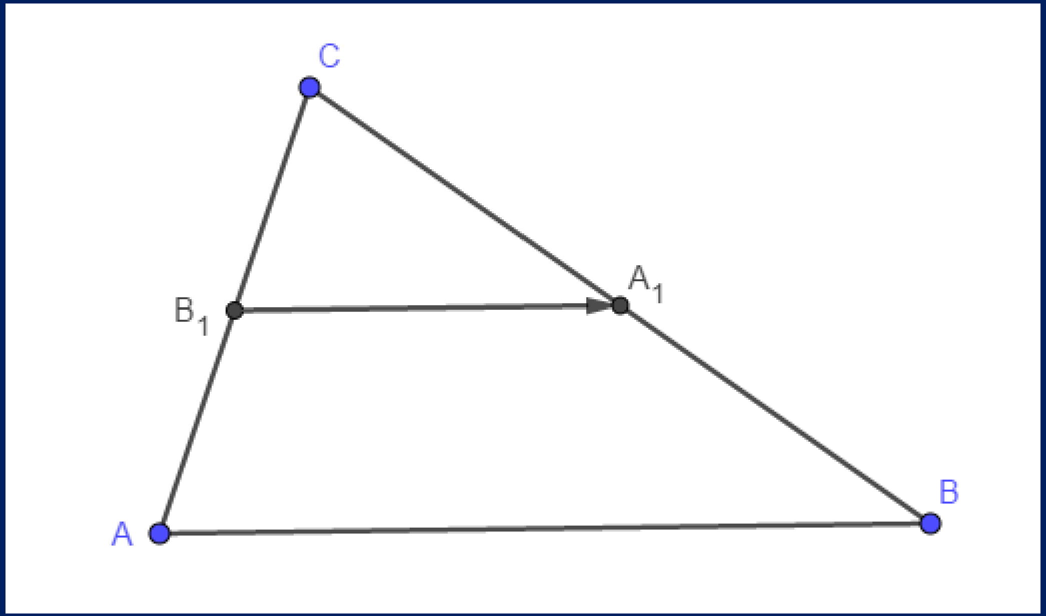
VEKTOROK ALKALMAZÁSA

- Háromszög középvonala: legyenek A1 és B1 az ABC háromszög BC és AC oldalának felezőpontjai, akkor az A1B1 szakasz a háromszög középvonala, párhuzamos vele és fele akkora.

$$\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1}$$

$$\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$$

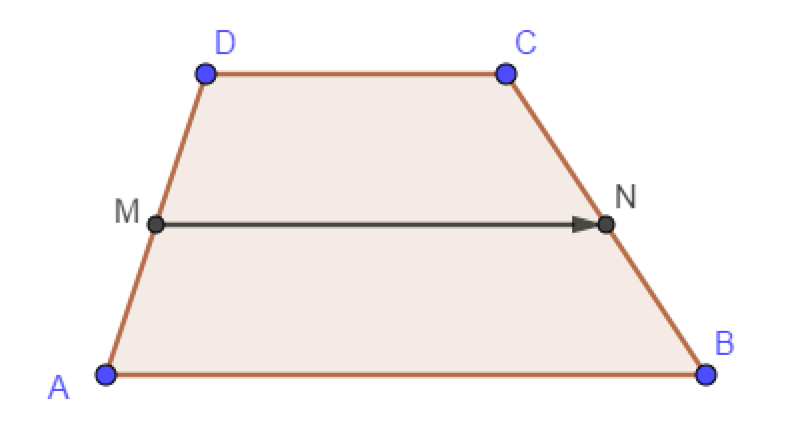
$$2\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{AB}$$



VEKTOROK ALKALMAZÁSA

- Trapéz középvonala: legyenek a trapéz párhuzamos oldalai AB és DC, M és N pontok az AD és BC szárak felezőpontja. Ekkor az MN a trapéz középvonala és felírható

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$$

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

Ellentett vektorok

$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MD}$$

$$\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{CN}$$

VEKTOROK ALKALMAZÁSA

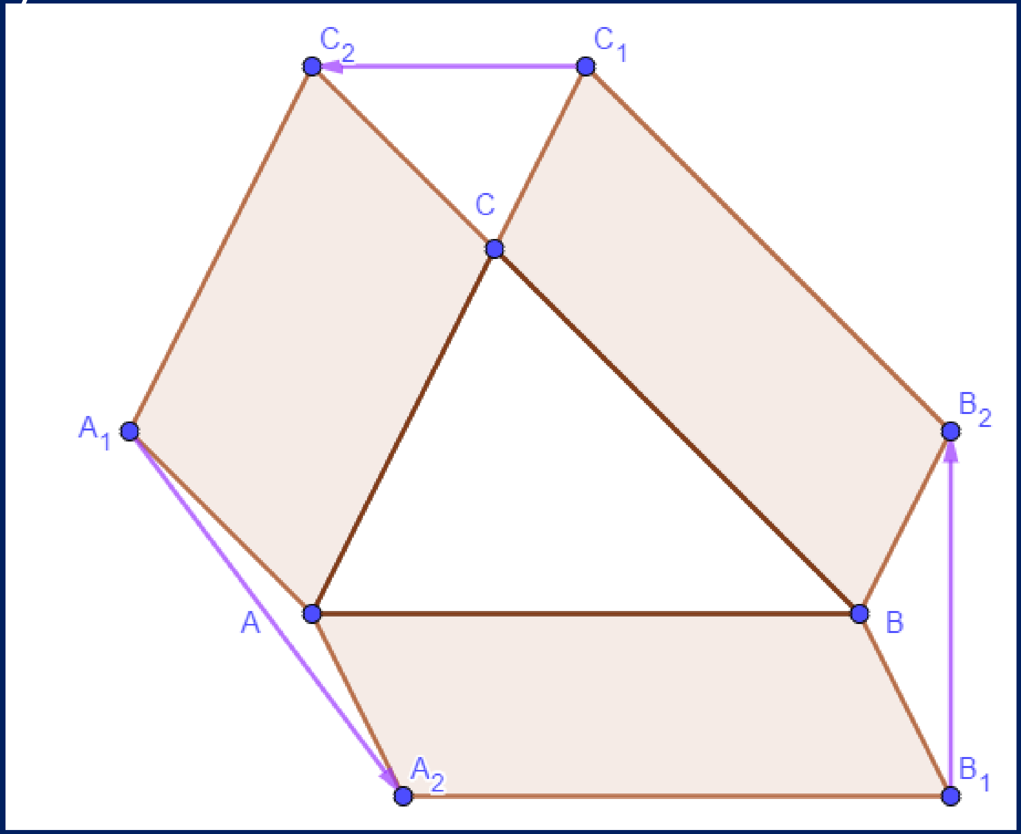
- 2.feladat: Szerkesszünk az ABC háromszög oldalaira ABB_1A_2, BCC_1B_2, CAA_1C_2 paralelogrammákat. Bizonyítsd be, hogy érvényes :

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AA_2} \qquad \overrightarrow{A_1A}=-\overrightarrow{CC_2}$$

$$\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BB_2} \qquad \overrightarrow{AA_2}=-\overrightarrow{B_1B}$$

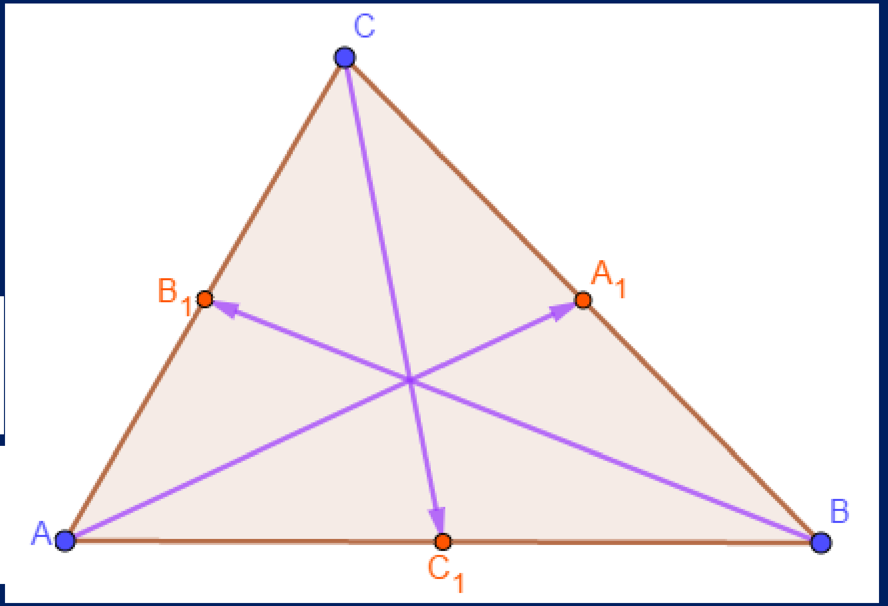
$$\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CC_2} \qquad \overrightarrow{BB_2}=-\overrightarrow{C_1C}$$



$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}+\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}+\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}=\vec{0}$$

- 3.feladat: Adott az ABC háromszög és az A_1,B_1, C_1 pontok, melyek a BC, CA, AB oldalak felezőpontjai. Igazoljuk, hogy :

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$$



$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1} \qquad \overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1} \qquad \overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC_1}$$

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA_1} \qquad \overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB_1} \qquad \overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1}$$

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2} \qquad \overrightarrow{BB_1}=\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2} \qquad \overrightarrow{CC_1}=\frac{\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}}{2}$$

VEKTOROK ALKALMAZÁSA

$$\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{CT}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1})=\vec{0}$$

- 5.feladat: Igazold, hogy az ABC háromszög AA_1, BB_1, CC_1 súlyvonalainak vektorai egy T pontban metszik egymást, amelyre érvényes, hogy :

$$\overrightarrow{AT}=2\overrightarrow{TA_1},\overrightarrow{BT}=2\overrightarrow{TB_1},\overrightarrow{CT}=2\overrightarrow{TC_1}$$

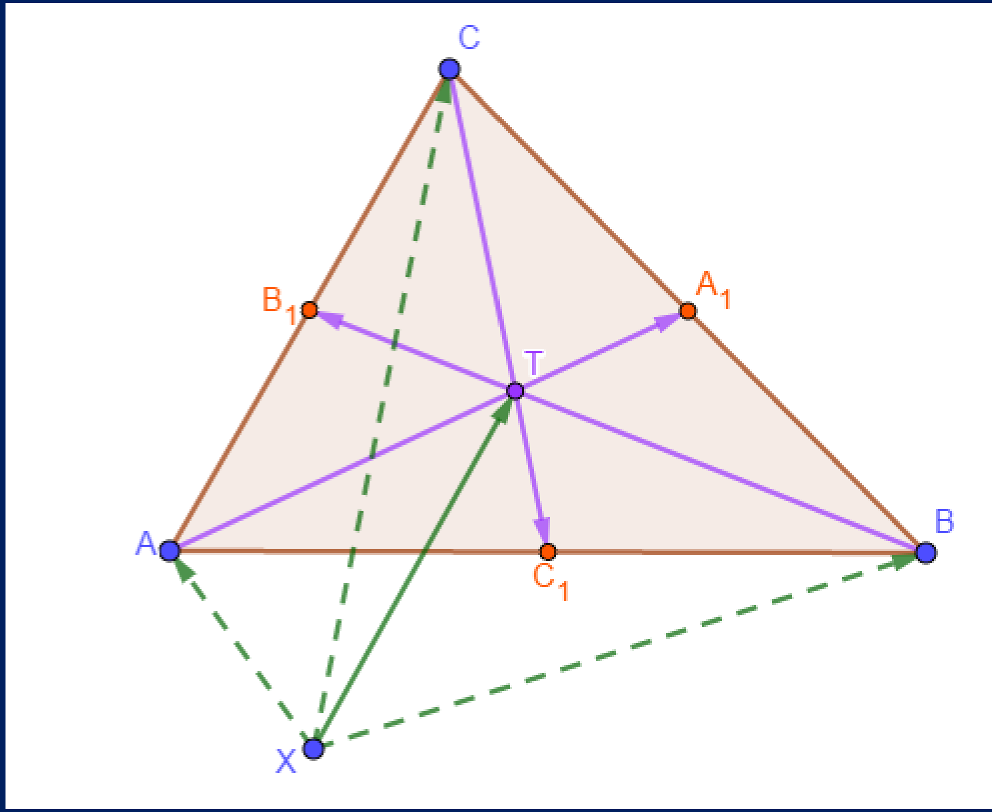
Ha X pont a háromszögön kívüli pont, akkor:

$$\overrightarrow{XT}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right)$$

$$\overrightarrow{XT}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AT}$$

$$\overrightarrow{XT}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BT}$$

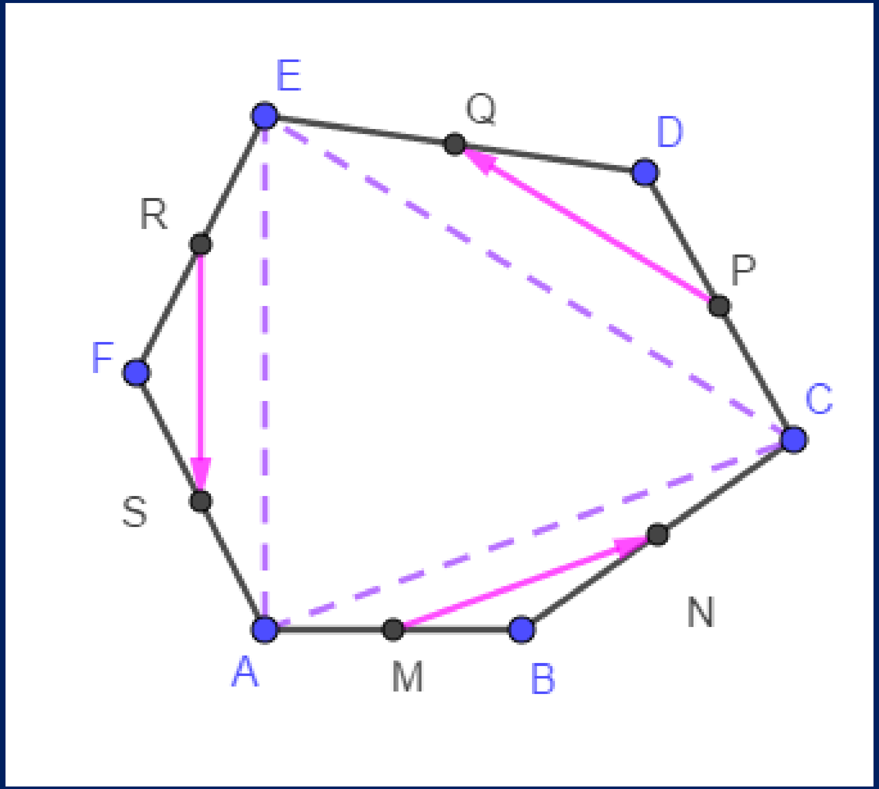
$$\overrightarrow{XT}=\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{CT}$$



VEKTOROK ALKALMAZÁSA

- 4.feladat: Legyenek M, N, P, Q, R, S pontok rendre egy tetszőleges hatszög oldalainak felezőpontjai. Igazold, hogy :

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$$



ABC háromszög középvonala $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$

CDE háromszög középvonala $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CE}$

EAF háromszög középvonala $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{EA}$

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA} \right) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$$

VEKTOROK ALKALMAZÁSA

$$2\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}$$

- Tétel: Legyen az ABC háromszög körülírható körének középpontja O és a magasságpontja H , továbbá legyenek A1, B1, C1 pontok a BC, CA, AB oldalak felezőpontjai. Ekkor érvényesek a következő egyenlőségek

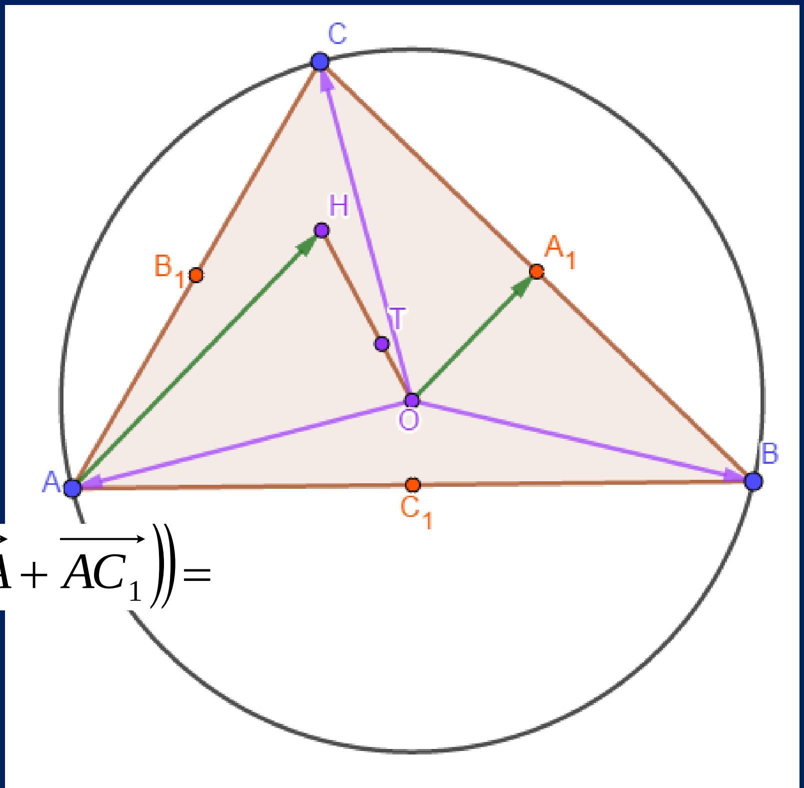
$$2\cdot\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{AH} \qquad 2\cdot\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{BH} \qquad 2\cdot\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{CH}$$

- Megoldás: $AH \parallel OA_1$ $\quad AHT\Delta \sim A_1OT\Delta$

$$\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}$$

$$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=2\cdot\overrightarrow{OA_1}+2\cdot\overrightarrow{OB_1}+2\cdot\overrightarrow{OC_1}=2\left(\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA_1}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB_1}\right)+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC_1}\right)\right)=$$

$$=2\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=2\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$



Köszönöm a megtisztelő figyelmet

Ez a bemutató a vektorokról és a vektorműveletekről szólt